Université de Rennes

# Analyse et Probabilités 1

## Feuille d'exercices de probabilités n°1

### Applications, injections, surjections

**Révisions n°1**

- Préciser ce que sont l'image directe et l'image réciproque d'une partie par une application $f$. Donner des exemples. Justifier la notation $f^{-1}(A)$. Quelles sont les notations probabilistes correspondantes ?
- Quand dit-on qu'une application est surjective ? Qu'elle est injective ?
- Comment démontre-t-on qu'une application est surjective ? Qu'elle est injective ?
  L'application $f : \mathbb{C}\backslash\{-i,i\} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \mapsto \dfrac{z}{1+z^2}$ est-elle surjective ? est-elle injective ?

**Exercice n°1**

Soit $X$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $X(x) = x^2 + x - 2$.

**1)** Calculer $X^{-1}(\{4\})$. L'application $X$ est-elle injective ? Est-elle surjective ?

**2)** Calculer $X([-1,1])$ ainsi que $X^{-1}([-2,4])$

**Exercice n°2**

Soit $X$ l'application de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même définie par $X((x,y)) = (x+y, xy)$ pour tout $(x,y)$ de $\mathbb{R}^2$. Calculer $X^{-1}(\{(3,2)\})$. L'application $X$ est-elle injective ? Est-elle surjective ? Déterminer son image.

**Exercice n°3** *(CAPES 2014ex - Deuxième composition)*

Soit $b$ un nombre premier distinct de 2 et 5. On note $\bar{a}$ la classe d'un entier $a$ dans $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ et $(\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^*$ l'ensemble $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ privé de $\bar{0}$. Démontrer que l'application $f : \left\{\begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^* & \longrightarrow & (\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^* \\ \bar{a} & \longmapsto & \overline{10} \times \bar{a} \end{array}\right.$ est bien définie et injective.

**Exercice n°4**

Soient $f$ une application de $E$ dans $F$, $g$ une application de $F$ dans $G$ et $h = g \circ f$.

**1)** Montrer que si $h$ est surjective et $g$ injective, alors $f$ est surjective.

**2)** Montrer que si $h$ est injective et $f$ surjective alors $g$ est injective.

**Exercice n°5**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles non vides et $X$ une application de $E$ dans $F$.

**1)** Soient $A_1$ et $A_2$ deux parties de $E$. Montrer que l'on a toujours $X(A_1 \cup A_2) = X(A_1) \cup X(A_2)$ mais que $X(A_1 \cap A_2) \subset X(A_1) \cap X(A_2)$ avec égalité si $X$ est injective.

**2)** Soient $B_1$ et $B_2$ deux parties de $F$. Montrer que $X^{-1}(B_1 \cup B_2) = X^{-1}(B_1) \cup X^{-1}(B_2)$. Montrer que $X^{-1}(B_1 \cap B_2) = X^{-1}(B_1) \cap X^{-1}(B_2)$ et que $X^{-1}(\overline{B_1}) = \overline{X^{-1}(B_1)}$.

**3)** Soient $X$ et $Y$ deux applications de $\Omega$ dans $\mathbb{N}$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (X+Y)^{-1}(\{n\}) = \bigcup_{k=0}^{n} X^{-1}(\{k\}) \cap Y^{-1}(\{n-k\})$$

**Exercice n°6** *(CAPES 2020 - Première composition)*

Soit $n$ un entier naturel non nul et $((P_0,\alpha_0),...,(P_n,\alpha_n))$ un système de $n+1$ points pondérés (du plan affine $\mathscr{P}$) de poids total $\alpha = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k$.

On note $f$ l'application de $\mathscr{P}$ dans $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ qui, à tout point $M$ de $\mathscr{P}$ associe le vecteur $f(M) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MP_i}$.

**1)** Soient $M$ et $N$ deux points de $\mathscr{P}$. Démontrer l'égalité vectorielle $f(N) = f(M) + \alpha\overrightarrow{NM}$.

**2)** Démontrer que, si $\alpha \neq 0$, alors $f$ est injective et surjective.

**3)** En déduire que $f$ est bijective si et seulement si $\alpha \neq 0$.

**4)** On suppose $\alpha$ non nul. Montrer qu'il existe un unique point $G$ tel que $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GP_i} = \overrightarrow{0}$.

## Dénombrements

**Révisions n°2**

- Quand dit-on qu'un ensemble est dénombrable ? Qu'est-ce que le cardinal d'un ensemble ?
- (Capes 2025 - première composition) $E$ étant un ensemble fini et $A_1$, $A_2$ et $A_3$ des parties de $E$, montrer que $\mathrm{Card}(A_1 \cup A_2) = \mathrm{Card}(A_1) + \mathrm{Card}(A_2) - \mathrm{Card}(A_1 \cap A_2)$.
  En s'inspirant de la relation précédente et en illustrant la réponse par un schéma (diagramme de Venn), donner *avec* démonstration une expression de $\mathrm{card}(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$, en fonction des cardinaux des intersections de ces parties.
  Ce résultat est généralisable (formule du crible) :
  Étant données $n$ parties $A_1, A_2, \cdots, A_n$ d'un ensemble $E$ fini non vide, on a
  $$\mathrm{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \mathrm{card}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})\right).$$
- Soit $\Omega$ un ensemble à $n$ éléments. Combien $\Omega$ a-t-il de parties ? Démontrer ce résultat.
  Qu'est-ce qu'une $p$-liste ($p \in \mathbb{N}^*$) d'éléments de $\Omega$ ? Combien y en a-t-il ?
  Qu'est-ce qu'un $p$-arrangement d'éléments de $\Omega$ ? Combien y en a-t-il ?
  Qu'est-ce qu'une $p$-combinaison d'éléments de $\Omega$ ? Combien y en a-t-il ?

**Exercice n°7** *(CAPES 2025 - Première composition)*

Soit $n$ un entier naturel non nul et soit $E_n$ le sous ensemble de $\mathbb{N}$ défini par $E_n = \{1, 2, \cdots, n\}$.

On appelle permutation de $E_n$ toute bijection de $E_n$ dans lui-même. Soit $\sigma$ une permutation de $E_n$ et $i$ un élément de $E_n$. Dire que $i$ est un point fixe de $\sigma$ signifie que $\sigma(i) = i$.
On appelle *dérangement* de $E_n$ une permutation de $E_n$ n'ayant aucun point fixe.

On note $S_n$ l'ensemble des permutations de $E_n$ et on rappelle que le cardinal de $S_n$ est $n!$.
On note $D_n$ l'ensemble des dérangements de $E_n$. Le cardinal de $D_n$ est noté $d_n$.

**1)** Donner les valeurs de $d_1$ et $d_2$.

Pour tout entier $i$ élément de $E_n$, on note $A_i$ l'ensemble des permutations admettant au moins $i$ pour point fixe.
$$A_i = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(i) = i\}$$

**2)** Démontrer que $S_n \backslash D_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

**3)** Étant donnés un entier $k$ de $E_n$ et $k$ entiers deux à deux distincts $i_1, i_2, \cdots, i_k$, justifier l'égalité

$$\text{card}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = (n-k)!$$

**4)** Déduire des deux questions précédentes et de la formule du crible que

$$d_n = n! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (n-k)!$$

**5)** Démontrer que $d_n = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

**Exercice n°8** VRAI ou FAUX *(Mayotte 2025 - Deuxième composition)*
Les parties à 10 éléments sont deux fois plus nombreuses dans un ensemble à 20 éléments que dans un ensemble à 19 éléments.

**Exercice n°9** *(CAPES 2023 - Première composition)*
Étant donné un entier naturel $n$ supérieur ou égal à 3, on trace dans un plan $n$ droites de sorte qu'il n'existe pas parmi elles deux droites parallèles ni trois droites concourantes.
Montrer que le nombre de triangles ainsi obtenus est égal à $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

**Exercice n°10** *(CAPES 2024 - Première composition)*
Soit $E$ un ensemble fini non vide dont un des éléments est noté $a$.
Vrai ou Faux : il y a autant de parties de $E$ contenant $a$ que de parties ne le contenant pas.

**Exercice n°11**

On considère les nombres à huit chiffres dont l'écriture comporte chacun des chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8.

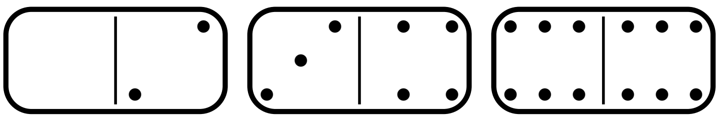
**1)** Combien y a-t-il de tels nombres ? Montrer qu'aucun de ces nombres n'est premier.

**2)** Si on range ces nombres par ordre croissant, quel est le rang de 48 713 526 ?

**3)** Quelle est la somme de tous ces nombres ?

**Exercice n°12** Vrai ou Faux *(BAC 2024 - Première composition)*
Le code d'un immeuble est composé de quatre chiffres (qui peuvent être identiques) suivis de deux lettres distinctes parmi A, B et C (exemple : 1232BA).
*Affirmation : Il existe 20 634 codes qui contiennent au moins un 0.*

**Exercice n°13** VRAI ou FAUX *(CAPLP 2023)*
Un domino est constitué de deux cases, chaque case contenant un nombre de points compris entre 0 et 6.
Exemples de dominos :



PROPOSITION : *Il y a 28 dominos différents.*

**Exercice n°14**

Un sac contient six jetons numérotés de 1 à 6. On en tire successivement trois sans remise. Quel est le nombre de tels tirages produisant une suite non monotone ?

**Exercice n°15** *(CAPES 2015 - Deuxième composition)*

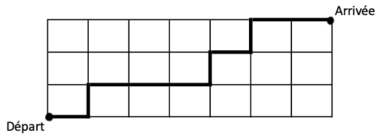
Dans l'enseignement supérieur, on définit, pour tout entier $p \in [\![0, n]\!]$, l'entier $\binom{n}{p}$ comme étant le nombre de parties à $p$ éléments d'un ensemble à $n$ éléments.

**1)** Justifier la cohérence de cette définition avec celle qui est donnée au lycée et montrer que $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

**2)** On suppose dans cette question que $k \neq 0$. En exprimant de deux manières différentes le nombre de $(n+1)$-uplets contenant $k$ fois l'élément 1, démontrer que $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$.

**Exercice n°16** *(CAPES 2024 - Première composition)*

Vrai ou Faux : le nombre de trajets les plus courts pour aller du départ à l'arrivée sur le quadrillage ci-dessous est égal à 120.




**Exercice n°17** *(BAC 2024 - Première composition)*

Une professeure enseigne la spécialité mathématiques dans une classe de 31 élèves de terminale. Elle s'intéresse à l'autre spécialité des 31 élèves de son groupe :

- 10 élèves ont choisi la spécialité physique-chimie ;
- 20 élèves ont choisi la spécialité SES ;
- 1 élève a choisi la spécialité LLCE espagnol.

Elle veut former un groupe de 5 élèves comportant exactement 3 élèves ayant choisi la spécialité SES. De combien de façons différentes peut-elle former un tel groupe ?

**Exercice n°18**

Un code d'entrée dans une résidence est composé de cinq chiffres (ordonnés). (Pour rappel, les chiffres sont 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.)
Combien de tels codes comportent exactement un « 0 », un « 2 », un « 5 » et deux « 3 » ?

**Exercice n°19**

Un jeu de 32 cartes est constitué des cartes 7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi, As dans chacune des quatre couleurs trèfle $\clubsuit$, carreau $\diamondsuit$, coeur $\heartsuit$ et pique $\spadesuit$.
Combien de mains de trois cartes comportent exactement un seul roi et un seul carreau $\diamondsuit$ ?

**Exercice n°20** *($\star$)*

Un placard renferme $n$ paires de chaussures toutes différentes. On en extrait au hasard $2r$ chaussures.

**1)** Combien y a-t-il de résultats possibles ?

**2)** Combien y en a-t-il ne contenant aucune paire ? On proposera plusieurs méthodes de résolution.

**Exercice n°21**

On dispose de cinq boules et de quatre urnes.

**1)** Combien y a-t-il de répartitions possibles de ces boules dans ces urnes ?

**2)** Combien y a-t-il de répartitions laissant au moins deux urnes vides ?

**3)** Combien y a-t-il de répartitions où une urne au moins contient trois boules ?

**4)** Combien y a-t-il de répartitions où une urne contient au moins trois boules ?

## Exercice n°22

**1)** Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$. Montrer qu'il y a $\binom{n}{p}$ $p$-uplets $(x_1, \cdots, x_p) \in \mathbb{N}^p$ tels que $0 \leqslant x_1 < \cdots < x_p < n$.
**Application :** Combien y a-t-il d'injections croissantes de $\{1, \cdots, p\}$ dans $\{1, \cdots, n\}$ ?

**2)** Montrer alors que $\binom{n+p-1}{p}$ est le nombre de $p$-uplets $(y_1, \cdots, y_p) \in \mathbb{N}^p$ tels que $0 \leqslant y_1 \leqslant \cdots \leqslant y_p < n$.

## Exercice n°23 *(⋆)*

Pour $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, on note $H_n^p$ le nombre de solutions $(x_1, \cdots, x_p) \in \mathbb{N}^p$ de l'équation $\sum_{k=1}^{p} x_k = n$.

Montrer que $H_n^p = \binom{n+p-1}{p-1}$.

**Application 1 :** 20 auteurs ont écrit des livres particulièrement intéressants pour réussir notre concours. On a un buget suffisant pour acheter 10 livres. Il va falloir faire un choix. On ne pourra pas avoir un livre par auteur. En revanche, on pourra avoir plusieurs livres du même auteur. Pour chaque achat possible de 10 livres, on ne s'intéresse qu'aux séquences des nombres de livres achetés de chacun de ces auteurs recommandés. Sachant que ces auteurs ont tous publié au moins 10 livres, quel est le nombre de séquences possibles ?
**Application 2 :** De combien de façons peut-on partager cent pièces de 1 euro entre cinq personnes.

## Exercice n°24 *(⋆)*

Pour $n, p \in \mathbb{N}$, on se donne $p$ entiers $n_i \in \mathbb{N}$ tels $n_1 + n_2 + \cdots + n_p = n$.
Dénombrer les $p$-uplets $X = (x_1, \cdots, x_p)$ de $\mathbb{N}^p$ contenant exactement $n_1$ fois 1, $n_2$ fois 2,..., $n_p$ fois $p$.

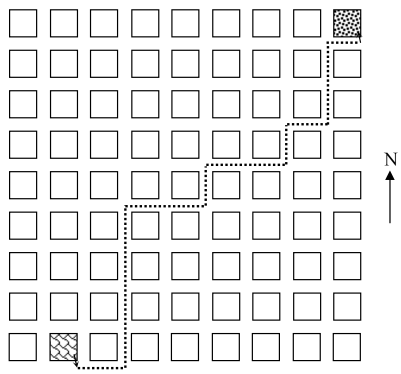
**Application : Vrai ou Faux**

**1)** le nombre d'anagrammes du mot DENOMBRE est 20 160. *(Mayotte 2022 - Deuxième composition)*

**2)** Le code d'accès à un immeuble est un nombre de cinq chiffres. Ce code comporte un « 1 », un « 2 », un « 7 » et deux fois le chiffre « 8 ». PROPOSITION : *on peut composer 60 codes différents avec ces chiffres. (Mayotte 2023 - Deuxième composition)*

## Exercice n°25 *(Oral 2 - CAPES 2006)*

Un homme travaille à Manhattan, dans un quartier où les avenues sont orientées nord-sud et les rues est-ouest.
Il travaille à sept pâtés de maison à l'est et huit pâtés de maison au nord de son domicile. Pour aller à son travail chaque jour il parcourt donc la longueur de quinze pâtés de maison (il ne se dirige ni au sud ni à l'ouest).
On suppose qu'il existe une voie le long de chaque pâté de maisons et qu'il peut prendre n'importe lesquelles dans ce schéma rectangulaire. Le dessin ci-contre illustre la situation; un trajet a été représenté en pointillé.




**1)** Proposer un « codage » permettant de décrire le trajet représenté.

**2)** Combien de trajets différents l'homme peut-il emprunter ?

**3)** L'homme prétend que le nombre de trajets est aussi le nombre de suites de huit entiers naturels dont la somme est 8. A-t-il raison ?

## Exercice n°26

En utilisant trois méthodes différentes, dénombrer le nombre de poignées de mains échangées, dans un groupe de 13 personnes, si chacune échange une poignée de main avec toutes les autres.