UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Analyse et Probabilités 1

Feuille d'exercices de probabilités n°1

Applications, injections, surjections

Révisions n°1

- Préciser ce que sont l'image directe et l'image réciproque d'une partie par une application f. Donner des exemples. Justifier la notation $f^{-1}(A)$. Quelles sont les notations probabilistes correspondantes ?
- Comment démontre-t-on qu'une application est surjective ? Qu'elle est injective ?
  L'application $f : \mathbb{C}\backslash\{-i, i\} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \dfrac{z}{1+z^2}$ est-elle surjective ? est-elle injective ?

Exercice n°1

Soit X l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $X(x) = x^2 + x - 2$.

1) Donner la définition de $X^{-1}(\{4\})$. Calculer $X^{-1}(\{4\})$.

2) X est-elle injective ? Est-elle surjective ?

3) Donner la définition de $X([-1, 1])$. Calculer $X([-1, 1])$.

4) Donner la définition de $X^{-1}([-2, 4])$. Calculer $X^{-1}([-2, 4])$

Exercice n°2

Soit X l'application de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même définie par $X((x, y)) = (x + y, xy)$ pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$.

1) Calculer $X^{-1}(\{(3, 2)\})$. X est-elle injective ?

2) X est-elle surjective ? Déterminer son image.

Exercice n°3 *(CAPES 2014ex - Deuxième composition)*

Soit b un nombre premier distinct de 2 et 5. On note $\bar{a}$ la classe d'un entier a dans $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ et $(\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^*$ l'ensemble $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ privé de 0. Démontrer que l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^* & \to & (\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^* \\ \bar{a} & \mapsto & \overline{10} \times \bar{a} \end{array} \right.$ est bien définie et injective.

Exercice n°4

Soient f une application de E dans F, g une application de F dans G et $h = g \circ f$.

1) Montrer que si h est surjective et g injective, alors f est surjective.

2) Montrer que si h est injective et f surjective alors g est injective.

Exercice n°5

Soient E et F deux ensembles non vides et X une application de E dans F.

1) Soient A_1 et A_2 deux parties de E. Montrer que l'on a toujours $X(A_1 \cup A_2) = X(A_1) \cup X(A_2)$ mais que $X(A_1 \cap A_2) \subset X(A_1) \cap X(A_2)$ avec égalité si X est injective.

2) Soient B_1 et B_2 deux parties de F. Montrer que $X^{-1}(B_1 \cup B_2) = X^{-1}(B_1) \cup X^{-1}(B_2)$. Montrer que $X^{-1}(B_1 \cap B_2) = X^{-1}(B_1) \cap X^{-1}(B_2)$ et que $X^{-1}(\overline{B_1}) = \overline{X^{-1}(B_1)}$.

3) Soient X et Y deux applications de Ω dans $\mathbb{N}$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (X+Y)^{-1}(\{n\}) = \bigcup_{k=0}^{n} X^{-1}(\{k\}) \cap Y^{-1}(\{n-k\})$$

Exercice n°6 *(CAPES 2020 - Première composition)*

Soit n un entier naturel non nul et $((P_0, \alpha_0), ..., (P_n, \alpha_n))$ un système de $n+1$ points pondérés (du plan affine $\mathscr{P}$) de poids total $\alpha = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k$.

On note f l'application de $\mathscr{P}$ dans $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ qui, à tout point M de $\mathscr{P}$ associe le vecteur $f(M) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MP_i}$.

1) Soient M et N deux points de $\mathscr{P}$. Démontrer l'égalité vectorielle $f(N) = f(M) + \alpha\overrightarrow{NM}$.

2) Démontrer que, si $\alpha \neq 0$, alors f est injective et surjective.

3) En déduire que f est bijective si et seulement si $\alpha \neq 0$.

4) On suppose α non nul. Montrer qu'il existe un unique point G tel que $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GP_i} = \overrightarrow{0}$.

Dénombrements

Révisions n°2

- Quand dit-on qu'un ensemble est dénombrable ? Qu'est-ce que le cardinal d'un ensemble ?
- A et B étant deux ensembles finis, montrer que $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$
  Illustrer par un diagramme de Venn. Ce résultat est-il généralisable ?
- Soit Ω un ensemble à n éléments. Combien Ω a-t-il de parties ? Démontrer ce résultat.
  Qu'est-ce qu'une p-liste ($p \in \mathbb{N}^*$) d'éléments de Ω ? Combien y en a-t-il ?
  Qu'est-ce qu'un p-arrangement d'éléments de Ω ? Combien y en a-t-il ?
  Qu'est-ce qu'une p-combinaison d'éléments de Ω ? Combien y en a-t-il ?

Exercice n°7

On considère les nombres à huit chiffres dont l'écriture comporte chacun des chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8.

1) Combien y a-t-il de tels nombres ? Montrer qu'aucun de ces nombres n'est premier.

2) Si on range ces nombres par ordre croissant, quel est le rang de 48 713 526 ?

3) Quelle est la somme de tous ces nombres ?

Exercice n°8

Un sac contient six jetons numérotés de 1 à 6. On en tire successivement trois sans remise. Quel est le nombre de tels tirages produisant une suite non monotone ?

Exercice n°9 *(CAPES 2015 - Deuxième composition)*

Dans l'enseignement supérieur, on définit, pour tout entier $p \in [\![0, n]\!]$, l'entier $\binom{n}{p}$ comme étant le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments.

1) Justifier la cohérence de cette définition avec celle qui est donnée au lycée et montrer que $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

2) On suppose dans cette question que $k \neq 0$. En exprimant de deux manières différentes le nombre de $(n+1)$-uplets contenant k fois l'élément 1, démontrer que $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$.

Exercice n°10

Un placard renferme n paires de chaussures toutes différentes. On en extrait au hasard $2r$ chaussures. Combien y a-t-il de résultats possibles ? Combien y en a-t-il ne contenant aucune paire ?

Exercice n°11

1) Soient n et p deux entiers naturels. Montrer que $\binom{n}{p}$ est le nombre de p-uplets $(x_1, \cdots, x_p) \in \mathbb{N}^p$ tels que $0 \leqslant x_1 < \cdots < x_p < n$.
Application : Combien y a-t-il d'injections croissantes de $\{1, \cdots, p\}$ dans $\{1, \cdots, n\}$?

2) Montrer alors que $\binom{n+p-1}{p}$ est le nombre de p-uplets $(y_1, \cdots, y_p) \in \mathbb{N}^p$ tels que $0 \leqslant y_1 \leqslant \cdots \leqslant y_p < n$.

Exercice n°12

Pour $n, p \in \mathbb{N}$, on note H_n^p le nombre de solutions $(x_1, \cdots, x_p) \in \mathbb{N}^p$ de l'équation $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} x_k = n$.

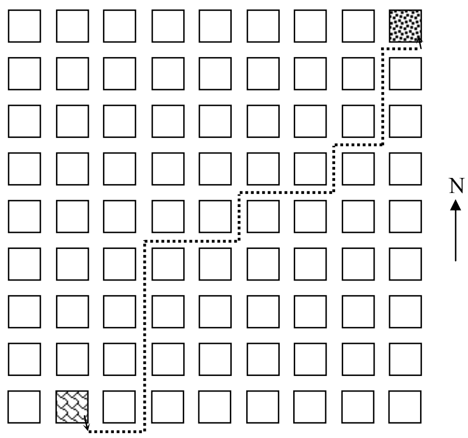
Montrer que $H_n^p = \binom{n+p-1}{p-1}$.
Application 1 : 20 auteurs ont écrit des livres particulièrement intéressants pour réussir notre concours. On a un buget suffisant pour acheter 10 livres. Il va falloir faire un choix. On ne pourra pas avoir un livre par auteur. En revanche, on pourra avoir plusieurs livres du même auteur. Pour chaque achat possible de 10 livres, on ne s'intéresse qu'aux séquences des nombres de livres achetés de chacun de ces auteurs recommandés. Sachant que ces auteurs ont tous publié au moins 10 livres, quel est le nombre de séquences possibles ?
Application 2 : De combien de façons peut-on partager cent pièces de 1 euro entre cinq personnes.

Exercice n°13

Pour $n, p \in \mathbb{N}$, on se donne p entiers $n_i \in \mathbb{N}$ tels $n_1 + n_2 + \cdots + n_p = n$.
Dénombrer les p-uplets $X = (x_1, \cdots, x_p)$ de $\mathbb{N}^p$ contenant exactement n_1 fois 1, n_2 fois 2,…, n_p fois p.
Application : Combien y a-t-il d'anagrammes du mot MATHEMATIQUES ?

Exercice n°14 *(Oral 2 - CAPES 2006)*

Un homme travaille à Manhattan, dans un quartier où les avenues sont orientées nord-sud et les rues est-ouest.
Il travaille à sept pâtés de maison à l'est et huit pâtés de maison au nord de son domicile. Pour aller à son travail chaque jour il parcourt donc la longueur de quinze pâtés de maison (il ne se dirige ni au sud ni à l'ouest).
On suppose qu'il existe une voie le long de chaque pâté de maisons et qu'il peut prendre n'importe lesquelles dans ce schéma rectangulaire. Le dessin ci-contre illustre la situation ; un trajet a été représenté en pointillé.



1) Proposer un « codage » permettant de décrire le trajet représenté.

2) Combien de trajets différents l'homme peut-il emprunter ?

3) L'homme prétend que le nombre de trajets est aussi le nombre de suites de huit entiers naturels dont la somme est 8. A-t-il raison ?

Exercice n°15

On dispose de cinq boules et de quatre urnes. Combien y a-t-il de répartitions possibles de ces boules dans ces urnes ? De répartitions laissant au moins deux urnes vides ? De répartitions où une urne au moins contient trois boules ? De répartitions où une urne contient au moins trois boules ?