UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Analyse et Probabilités 1

Feuille d'exercices d'analyse n°2

Fonctions continues

Révisions n°1

- Rappeler la définition de la limite finie d'une fonction à valeurs réelles en un point a de $\mathbb{R}$. Donner des exemples simples, tous justifiables à l'aide de la définition.
  Montrer que si la fonction f admet une limite ℓ en a et si la suite (u_n) converge vers a alors la suite $(f(u_n))$ converge vers ℓ. Que dire de la réciproque ?
- Rappeler les définitions des limites à l'infini d'une fonction à valeurs réelles. Comparer avec les suites. Donner des exemples simples, tous justifiables à l'aide de la définition.
- **Théorème de la limite monotone.** *(CAPES 2022 - Première composition)*
  Soit f une fonction croissante sur l'intervalle $]a;b[$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $a < b$. Démontrer que si f est majorée alors elle admet une limite finie à gauche en b, égale à la borne supérieure de l'ensemble $\{f(x); x \in]a,b[\}$. Que dire lorsque f est minorée ?

Exercice n°1

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^3 \sin^3 x - x^2 \cos^2 x + x \sin x - 3}{x^2 \cos x + 20}$ pour $x \in [-1, 4]$. Trouver deux nombres réels a, b tels que $a \leqslant f(x) \leqslant b$ pour tout x de l'intervalle $[-1, 4]$.

Exercice n°2

Soit $f : x \longmapsto \cos x + x^4$ et $x_0 = \ell n\, 5$ (donc $1 < x_0 < 2$). On veut calculer $f(x_0)$ avec une précision de 10^{-2}.

a) Trouver un réel $\eta_1 > 0$ tel que pour tout x vérifiant $|x - x_0| < \eta_1$, on ait $|\cos x - \cos x_0| < 0,005$. On pourra utiliser la factorisation de $\cos p - \cos q$ et la majoration $|\sin x| \leqslant |x|$.

b) Trouver un réel $\eta_2 > 0$ tel que pour tout x vérifiant $|x - x_0| < \eta_2$, on ait $|x^4 - x_0^4| < 0,005$.

c) En déduire un réel $\eta > 0$ tel que pour tout x vérifiant $|x - x_0| < \eta$, on ait $|f(x) - f(x_0)| < 10^{-2}$.

Exercice n°3

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, admettant une période strictement positive t. Montrer que si f a une limite en $+\infty$, alors f est constante.

Exercice n°4

Soit k un réel strictement positif et différent de 1. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x, $f(kx) = f(x)$. Montrer que si f est continue à l'origine, elle est constante.

Exercice n°5

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On note $E = \{x \in [a,b] | f(x) = 0\}$. Montrer que si E n'est pas vide, alors $\sup E$ est un élément de E.

Révisions n°2

- Rappeler la définition de la continuité d'une fonction à valeurs réelles sur un domaine D. Donner des exemples.
- Énoncer le ***théorème des valeurs intermédiaires.*** En donner une démonstration.
- Montrer qu'une fonction à valeurs réelles continue sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.

Exercice n°6

1) *(CAPES 2011 - Première composition ; CAPES 2014 - Deuxième composition)*
Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et soit f une fonction continue sur $[a, b]$, à valeurs dans $[a, b]$.

a) Montrer que f a au moins un point fixe : il existe c dans $[a, b]$ tel que $f(c) = c$.

b) Peut-on assurer l'unicité du point fixe si on suppose f en outre strictement décroissante (respectivement strictement croissante) ?

2) Soit $f : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et telle que $f(0) = f(2)$. Montrer que l'équation $f(x) = f(x+1)$ a au moins une solution.

Exercice n°7 *(CAPES 2011 - Oral 2 (sujet zéro))*
Un marcheur a parcouru 10 km en une heure. Existe-t-il un intervalle d'une demi-heure pendant lequel il a parcouru exactement 5 km ? Voici comment on se propose de résoudre ce problème :
Pour t appartenant à l'intervalle $[0, 1]$, on désigne par $f(t)$ la distance, en kilomètres, parcourue à l'instant t, en heures. Il est naturel de faire l'hypothèse que f est une fonction continue sur $[0, 1]$.

1) Préciser $f(0)$ et $f(1)$. Écrire l'équation traduisant le problème.

2) Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par $g(t) = f(t+\frac{1}{2})-f(t)$. Démontrer que l'équation $g(t) = 5$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$. Conclure.

Exercice n°8 *(CAPES 2020 - Deuxième composition)*
Soit F une fonction continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Démontrer que, pour tous nombres réels strictement positifs a et b, il existe un unique nombre strictement positif, noté α_F tel que

$$F(\alpha_F) = \frac{F(a) + F(b)}{2}.$$

Déterminer quatre fonctions F_1, F_2, F_3, F_4 continues et strictement monotones sur $\mathbb{R}^{+*}$ telles que, pour tous nombres réels a et b strictement positifs,

$$\frac{a+b}{2} = \alpha_{F_1}, \qquad \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = \alpha_{F_2}, \qquad \sqrt{ab} = \alpha_{F_3}, \qquad h = \alpha_{F_4} \text{ où } \frac{1}{h} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

Exercice n°9

Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ continue. On suppose que f admet la même limite finie ℓ en a et b. Montrer que f n'est pas injective sur $]a, b[$.

Exercice n°10 *(d'après CAPES 1993)*
Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue et ayant une limite finie ℓ en $+\infty$. Montrer que f est bornée sur $[0, +\infty[$ et atteint au moins une de ses bornes.

Exercice n°11

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue telle que pour tout $x > 0$, $|f(x)| < x$. Calculer $f(0)$. Montrer qu'à tout couple (a,b) de réels vérifiant $0 < a < b$, on peut associer un nombre k de $]0,1[$ tel que, pour tout x de $]a,b[$, $|f(x)| \leqslant kx$. Est-ce vrai pour les couples $(0,b)$?

Exercice n°12

Trouver toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Fonctions convexes

Révisions n°3

- Donner la définition d'une fonction ***convexe*** sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Donner des exemples dont au moins un concernera une fonction non dérivable sur I.
- Donner plusieurs interprétations géométriques de la convexité. Qu'appelle-t-on ***point d'inflexion*** ?

Exercice n°13 *(d'après CAPES 2022 - Première composition)*

1) Soit f et g deux fonctions convexes sur $\mathbb{R}$. Montrer que $f+g$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

2)a) Montrer que les fonctions $f : x \longmapsto e^{-x}$ et $g : x \longmapsto |x|$ sont convexes sur $\mathbb{R}$.

b) Soit $h : x \longmapsto e^{-|x|}$. Vérifier que $h(0) > \frac{1}{2}(h(1) + h(-1))$. h est-elle convexe sur $\mathbb{R}$?

3) Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexes. On pose $h = f \circ g$.

a) Peut-on affirmer que h est convexe sur $\mathbb{R}$?

b) On suppose en outre f croissante sur $\mathbb{R}$. Montrer que h est convexe sur $\mathbb{R}$.

Exercice n°14 *(CAPES 2013 - Première composition ; CAPES 2022 - Première composition)*

On considère une fonction f convexe sur un intervalle I, $(x_1, ..., x_n) \in I^n$, $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n$, avec $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$.

Démontrer que : $f\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$. *On pourra procéder par récurrence sur n en remarquant que si $\lambda_n \neq 1$:* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = \lambda_n x_n + (1-\lambda_n)\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_n} x_k\right)$

Exercice n°15

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et bornée.

1) Soit a un réel quelconque. On pose $g_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

a) Montrer que g_a est croissante sur l'intervalle $]a,+\infty[$ (on pourra, pour $a < x < y$, écrire x sous la forme $x = ta + (1-t)y$, pour un t convenablement choisi).
Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g_a(x) = 0$.

b) En déduire que f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(-x)$ est aussi convexe et bornée. Qu'en déduit-on pour f ?

3) Enoncer un résultat résumant cet exercice.

Exercice n°16 *(CAPES 2014 - Première composition)*
Soient α et β deux réels tels que $\alpha < \beta$ et f une fonction convexe deux fois dérivable sur $[\alpha, \beta]$, non identiquement nulle sur $[\alpha, \beta]$ et telle que $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Démontrer que nécessairement $f < 0$ sur $]\alpha, \beta[$.

Exercice n°17 *(CAPES 2022 - Première composition)*
Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction concave. On définit la fonction $\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}_+^*)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & yf\left(\dfrac{x}{y}\right) \end{array} \right.$

1) Démontrer que pour tout $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^4$, on a

$$\psi(x_1, y_1) + \psi(x_2, y_2) \leqslant \psi(x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

2) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{2n}$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \psi(x_k, y_k) \leqslant \psi\left(\sum_{k=1}^{n} x_k, \sum_{k=1}^{n} y_k\right) \quad (\star\star)$$