UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Analyse et Probabilités 1

Feuille d'exercices d'analyse n°1

Suites numériques

Révisions n°1

- Qu'est-ce qu'une suite numérique ? Rappeler la définition d'une suite convergente. Donner des exemples simples, tous justifiables à l'aide de la définition.
  Rappeler la définition d'une suite divergente. Donner des exemples simples, tous justifiables à l'aide de la définition.
- Montrer qu'une suite convergente est bornée.

Exercice n°1

Étudier la nature des suites (u_n) définies par :

a) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ **b)** $u_n = \dfrac{n + (-1)^n}{n + \ln n}$ **c)** $u_n = \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$ pour $a > 0$ et $b > 0$

d) $u_n = \dfrac{n^2 + \cos n}{2^n + \sin n}$ **e)** $u_n = \displaystyle\prod_{p=2}^{n} (1 - \frac{1}{p})$

Exercice n°2 *(CAPES 2009 - Oral 2)*

On considère une suite numérique (u_n) positive et la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier dans chaque cas.

1) La suite (v_n) est bornée.

2) Si la suite (u_n) est croissante, alors la suite (v_n) est croissante.

3) Si la suite (u_n) est convergente, alors la suite (v_n) est convergente.

4) Si la suite (v_n) est convergente, alors la suite (u_n) est convergente.

Exercice n°3

Étudier la nature des suites (u_n) définies par :

a) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k}$ **b)** $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^2 + k}}$ **c)** $u_n = \displaystyle\frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} k!$

d) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n + k}$ **e)** $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ **f)** $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

Exercice n°4 *(CAPES 2012 et CAPES 2021 - Première composition)*

On considère la suite $(H_n)_{n \geqslant 1}$ définie par $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Montrer que pour tout entier $k \geqslant 1$, $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k}$. En déduire que $H_n \underset{n \to \infty}{\sim} \ell n \, n$.

Exercice n°5

1) *(d'après CAPES 2014 - Oral 2)* Un magazine est vendu uniquement par abonnement. Le modèle économique prévoit qu'il y ait 1 800 nouveaux abonnés chaque année et que d'une année sur l'autre, 15 % des abonnés ne se réabonnent pas. En 2013, il y avait 8 000 abonnés.
Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre de milliers d'abonnés prévus en $(2013+n)$. Expliciter une relation entre u_{n+1} et u_n puis donner l'expression de u_n en fonction de n.

2) *(CAPES 2016 - Oral 2)* On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 7$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 10u_n - 18$. Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n en fonction de n.

3) *(CAPES 2021 - Oral 2)* Lors de la construction d'un barrage, on a créé un lac artificiel contenant initialement 80 000 m^3 d'eau. À partir des données recueillies, on estime que le lac est alimenté par un apport de 6 000 m^3 d'eau par an.
Si 10 % du volume de ce lac est prélevé chaque année pour produire de l'électricité, comment évolue le volume d'eau du lac au cours du temps ? Justifier.

D'après Hachette, collection Barbazo, terminale S

Exercice n°6 *(CAPES 2007 - Oral 2)*

Soit (x_n) la suite définie par $\begin{cases} x_{n+1} & = \dfrac{1}{2}x_n + \dfrac{1}{2^n} \\ x_0 & = 1 \end{cases}$

1) Déterminer x_1, x_2, x_3 et x_4, en laissant les résultats sous forme fractionnaire.

2) Montrer que la suite (x_n) est décroissante à partir du rang $n = 1$.

3) Montrer que la suite (x_n) est convergente et déterminer sa limite.

4) Conjecturer l'expression générale de x_n en fonction de n et démontrer cette égalité.

Exercice n°7 *(CAPES 2013 - Oral 2)*

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.

1) Montrer que pour pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.

2) En déduire les variations et la limite de la suite (u_n).

3) Construire un algorithme qui prend en entrée un réel A strictement positif et renvoie le plus petit entier n tel que $u_n > A$.

Exercice n°8 *(CAPES 2019 - Oral 2)*

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = u_n^2 - u_n.$$

Étudier le sens de variation de cette suite.

Révisions n°2

- Rappeler la définition de la borne supérieure d'une partie E de $\mathbb{R}$. Écrire (à l'aide de quantificateurs) une phrase mathématique signifiant que le réel M est la borne supérieure de la partie non vide E de $\mathbb{R}$.
  La borne supérieure de E est-elle toujours un élément de E ? Donner des exemples.
- *(CAPES 2015 - première composition)*
  Démontrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et non majorée, alors elle diverge vers $+\infty$.
  Démontrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et majorée alors elle converge.
  Établir une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite décroissante soit convergente.

- *(CAPES 2018 - première composition)*
  Quand dit-on que deux suites réelles sont adjacentes ?
  On suppose que la suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, que la suite réelle $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n-b_n)=0$. Montrer que la suite $(a_n-b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et en déduire que pour tout entier naturel n, $a_n \leqslant b_n$.
  Justifier que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes vers une même limite ℓ vérifiant : $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n\leqslant \ell\leqslant b_n$.
- Énoncer le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Exercice n°9

Les suites (u_n) et (v_n) convergent-elles ?

a) $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$ et $v_n=u_n+\dfrac{1}{2n+1}$ **b)** $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3}$ et $v_n=u_n+\dfrac{1}{n^2}$

Exercice n°10

On définit la suite (u_n) par $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$. Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes. Conclusion ?

Exercice n°11 *(CAPES 2015 - Première composition)*

On considère la suite définie pour tout entier naturel $n\geqslant 1$ par $a_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

Démontrer que, pour tout entier $n\geqslant 1$, $a_{2n}-a_n\geqslant\dfrac{1}{2}$. La suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est-elle convergente ?

Exercice n°12 *(CAPES 2013 et CAPES 2018 - Première composition)*

On rappelle que $e=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}$. On se propose de démontrer que le nombre e est un nombre irrationnel. Pour cela, on fait l'hypothèse qu'il existe p et q, entiers naturels non nuls, tels que $e=\dfrac{p}{q}$ et on démontre que cette hypothèse conduit à une contradiction.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ et $v_n=u_n+\dfrac{1}{n\times n!}$. Démontrer que les suites $(u_n)_{\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes, puis montrer que : $u_q<e<v_q$.
Aboutir à une contradiction en multipliant les termes de cet encadrement par $q!\times q$.

Exercice n°13 *(CAPES 2015 - Première composition)*

À toute suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$, on associe la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $\forall n\geqslant 1$, $v_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}u_k$. On dit que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge au sens de Cesàro si la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

1) Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de limite nulle et $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$.

a) Montrer qu'il existe $n_0\in\mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n\geqslant n_0$, $\dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n_0}u_k\right)-\varepsilon\leqslant v_n\leqslant\dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n_0}u_k\right)+\varepsilon$.

b) En déduire que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

2) Énoncer et démontrer la généralisation du résultat précédent au cas où la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel ℓ quelconque.

3) La réciproque de ce dernier résultat est-elle exacte ?

Exercice n°1

a) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$

b) $u_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n+\ell n\, n} = \dfrac{1+\dfrac{(-1)^n}{n}}{1+\dfrac{\ell n\, n}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$

c) Si $a > b$, $u_n = \dfrac{1-\dfrac{b^n}{a^n}}{1+\dfrac{b^n}{a^n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Si $b > a$, $u_n = \dfrac{\dfrac{a^n}{b^n}-1}{1+\dfrac{a^n}{b^n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} -1.$

d) $u_n = \dfrac{n^2+\cos n}{2^n+\sin n} = \dfrac{n^2}{2^n}\dfrac{1+\dfrac{\cos n}{n^2}}{1+\dfrac{\sin n}{2^n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$

e) $u_n = \prod_{p=2}^{n}(1-\dfrac{1}{p}) = \dfrac{1}{2}\dfrac{2}{3}\dfrac{3}{4}\cdots\dfrac{n-1}{n} = \dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$

Exercice n°2

1) Vrai : $0 \leqslant v_n \leqslant 1$.

2) Vrai : $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_{n+1}-u_n}{(1+u_{n+1})(1+u_n)} \geqslant 0$ et la suite (v_n) est croissante.

3) Vrai : si (u_n) converge vers ℓ alors $\ell \geqslant 0$ et (v_n) converge vers $\dfrac{\ell}{1+\ell}$.

4) Faux : la suite de terme général $u_n = n$ est divergente et pourtant la suite de terme général $v_n = \dfrac{n}{1+n}$ converge (vers 1).

Exercice n°3

a) $\forall n \geqslant 1$, $n\dfrac{n}{n^2+n} \leqslant u_n \leqslant n\dfrac{n}{n^2+1}$ et donc, par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$.

b) $\forall n \geqslant 1$, $n\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+k}}$ donc $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

c) $\forall n \geqslant 2$, $1+\dfrac{1}{n!}(n-1) \leqslant u_n = 1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n-2}k! \leqslant 1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n!}(n-2)(n-2)!$ et donc, par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$.

d) $u_n \leqslant \sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+1} \leqslant 1$ et $u_{n+1}-u_n = \sum_{K=2}^{n+2}\dfrac{1}{n+K} - \sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+k} = \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n+2} \geqslant 0$: la suite est croissante et majorée donc convergente.

e) La suite de terme général $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k!}$ est clairement croissante. $\forall k \geqslant 2$, $\dfrac{1}{k!} \leqslant \dfrac{1}{k(k-1)} = \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$ donc, pour $n \geqslant 2$, $u_n \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n}\left(\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{k}\right) = 2 - \dfrac{1}{n} \leqslant 2$. La suite est croissante et majorée donc converge.

f) De même la suite (u_n) est croissante et $\forall k \geqslant 2$, $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k(k-1)} = \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$ donc, pour $n \geqslant 2$, $u_n \leqslant 2$ et la suite converge.

$\boxed{\textbf{Exercice n°4}}$ *(CAPES 2012 et 2021 - Première composition)*

Pour tout $k \geqslant 1$, $t \mapsto \frac{1}{t}$ étant décroissante sur $[k, k+1]$, $\forall t \in [k, k+1]$, $\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k}$ et donc

$$\frac{1}{k+1} = \int_k^{k+1} \frac{dt}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{k} = \frac{1}{k}$$

Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. En sommant ces inégalités pour k allant de 1 à n (respectivement de 1 à $n-1$), on obtient $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} = \ell n\,(n+1)$ (respectivement $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \int_1^{n} \frac{dt}{t} = \ell n\, n$) soit $\ell n\,(n+1) \leqslant H_n \leqslant \ell n\, n + 1$.
Comme $\ell n\,(n+1) = \ell n\, n + \ell n\,(1 + \frac{1}{n})$ on en déduit $\frac{H_n}{\ell n\, n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ soit $H_n \underset{n\to\infty}{\simeq} \ell n\, n$.

$\boxed{\textbf{Exercice n°5}}$

1) *(d'après CAPES 2014 - Oral 2)* Pour tout entier naturel n on a $u_{n+1} = 0,85u_n + 1,8$. En posant $v_n = u_n - 12$, on vérifie que la suite (v_n) est géométrique puis que $u_n = 12 - 4(0,85)^n$.

2) *(CAPES 2016 - Oral 2)* La suite est arithmético-géométrique. En posant $v_n = u_n - 2$, on vérifie que la suite (v_n) est géométrique puis que $u_n = 2 + 5.10^n$.

3) *(CAPES 2021 - Oral 2)*

$\boxed{\textbf{Exercice n°6}}$ *(CAPES 2007 - Oral 2)*

Soit (x_n) la suite définie par $\begin{cases} x_{n+1} &= \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2^n} \\ x_0 &= 1 \end{cases}$

1) On a $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{5}{4}$, $x_3 = \frac{7}{8}$ et $x_4 = \frac{9}{16}$.

2) Une récurrence immédiate montre que $\forall n \geqslant 1$, $x_n \geqslant \frac{1}{2^{n-1}}$. Par suite, $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2^n} \leqslant 0$ et la suite (x_n) est décroissante à partir du rang $n = 1$.

3) La suite (x_n) étant également minorée (par 0), elle converge vers un réel ℓ. En passant à la limite dans la relation de récurrence, on a $\ell = \frac{1}{2}\ell$ et donc $\ell = 0$.

4) On montre par récurrence que $\forall n \geqslant 0$, $x_n = \frac{2n+1}{2^n}$.

$\boxed{\textbf{Exercice n°7}}$ *(CAPES 2013 - Oral 2)*

1) Une simple récurrence permet de conclure.

2) On en déduit que pour tout naturel n, $u_{n+1} - u_n = 2(u_n - n) + 3 > 0$: la suite (u_n) est strictement croissante. La question précédente entraîne d'autre part immédiatement $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

3) En initialisant n et u à 0, on effectue une boucle tant que $u < A$: u devient $3u - 2n + 3$ et n devient $n + 1$.

$\boxed{\textbf{Exercice n°8}}$ *(CAPES 2019 - Oral 2)*

$\boxed{\textbf{Exercice n°9}}$

a) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \geqslant 0$ et $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} + \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+1}$ soit $v_{n+1} - v_n = \frac{-2n-1}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)} \leqslant 0$: les deux suites sont adjacentes donc convergent.

b) La suite (u_n) est clairement croissante et $v_{n+1}-v_n = \dfrac{-n^2-3n-1}{n^2(n+1)^3} \leqslant 0$: les deux suites sont adjacentes donc convergent.

$\boxed{\textbf{Exercice n°10}}$

On a $u_{2n+2}-u_{2n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} - \frac{1}{\sqrt{2n+2}} \geqslant 0$, $u_{2n+3}-u_{2n+1} = -\dfrac{1}{\sqrt{2n+2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2n+3}} \leqslant 0$ et $u_{2n+1}-u_{2n} = \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ donc les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes. Elles convergent par suite vers la même limite ℓ. On en déduit que la suite (u_n) est convergente et que ℓ est sa limite.

$\boxed{\textbf{Exercice n°11}}$ *(CAPES 2015 - Première composition)*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $a_{2n}-a_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant n.\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$. Si la suite (a_n) était convergente on en déduirait à la limite $0 \geqslant \dfrac{1}{2}$ ce qui est absurde. On montre ainsi la divergence de la série harmonique.

$\boxed{\textbf{Exercice n°12}}$ *(CAPES 2013 et 2018 - Première composition)*

Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1}-u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$ donc $(u_n)_n$ est (strictement) croissante.
De même, $v_{n+1}-v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n.n!} = \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0$ et $(v_n)_n$ est (strictement) décroissante.
Enfin, $v_n - u_n = \frac{1}{n.n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et donc les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Elles convergent donc toutes deux vers la même limite qui est clairement e.
(u_n) est strictement croissante et de limite e donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < e$. De même, (v_n) est strictement décroissante et de limite e donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n > e$. En particulier, $u_q < e < v_q$.
Comme $e = \frac{p}{q}$, en multipliant les termes de l'encadrement précédent par $q.q!$, on a $q.q!u_q < p.q! < q.q!u_q + 1$.
Or, $q!u_q = \displaystyle\sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!}$ est une somme d'entiers donc est entier. Finalement, l'entier $p.q!$ est strictement compris entre deux entiers consécutifs, ce qui est absurde. e est donc irrationnel.

$\boxed{\textbf{Exercice n°13}}$ *(CAPES 2015 - Première composition)*

1) Par définition de la limite, on peut considérer $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0$, $|u_n| \leqslant \varepsilon$. Pour $n \geqslant n_0$ on a alors $v_n - \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n_0} u_k = \frac{1}{n}\sum_{k=n_0+1}^{n} u_k$ donc $\left| v_n - \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n_0} u_k \right| \leqslant \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=n_0+1}^{n} \varepsilon = \frac{n-n_0}{n}\varepsilon \leqslant \varepsilon$.

Comme $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0} u_k = 0$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} v_n = 0$.

2) Si (u_n) converge vers ℓ, le résultat précédent appliqué à la suite $(u_n - \ell)$ montre que (u_n) converge encore vers ℓ au sens de Césàro.

3) La réciproque est fausse comme le prouve l'exemple $u_n = (-1)^n$.