Université de Rennes

Algèbre et Géométrie 2

Feuille d'exercices de géométrie n°2

Géométrie et groupes

Révisions n°1

- Rappeler la classification des différentes isométries du plan.
- Soit X un espace affine euclidien et Γ une partie non vide de X. Montrer que l'ensemble des isométries f de X telles que $f(\Gamma) = \Gamma$ est un groupe. *Ce groupe est appelé groupe des isométries de* Γ.
- Soit $\Gamma = \{A, B, C, D\}$ l'ensemble des quatre sommets d'un rectangle non aplati $ABCD$. Décrire le groupe des isométries de ce rectangle.

Exercice n°1

Soit ABC un triangle isocèle en A non équilatéral, le but de cet exercice est d'étudier l'ensemble des isométries de $\mathscr{P}$ qui préservent globalement ABC.

1) Montrer que cet ensemble est un groupe.

2) Montrer que si f préserve ABC alors f fixe l'isobarycentre G de ABC.

3) En étudiant les distances GA, GB, GC montrer que $f(A) = A$.

4) En déduire (en utilisant la classification des isométries du plan) le groupe des isométries de ABC.

Exercice n°2

Déterminer le groupe d'isométries d'un segment dans le plan euclidien.

Exercice n°3

Déterminer le groupe des isométries du plan affine euclidien laissant globalement invariante la réunion de deux droites strictement parallèles.

Exercice n°4

Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles tels que $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$. Combien y a-t-il d'isométries transformant ABC en $A'B'C'$?

Indication : si f et g sont deux telles isométries, alors $f \circ g^{-1}$ est une isométrie conservant ABC.

Exercice n°5

Soit f, g deux isométries du plan affine euclidien $\mathbb{R}^2$.

1) Montrer que si g et f commutent alors $g = f \circ g \circ f^{-1}$ et f conserve (globalement) l'ensemble des points fixes de g.

2) Décrire les cas dans lesquels f et g commutent ($f \circ g = g \circ f$).

3) En déduire une description des sous-groupes commutatifs d'isométries.

Exercice n°6

Notons $D \subset \mathbb{R}^2$ une droite affine de $\mathbb{R}^2$.

1) Montrer que l'ensemble I_D des $g \in Iso(\mathbb{R}^2)$ telles que $g(D) = D$ est un sous-groupe de $Iso(\mathbb{R}^2)$.

2) Déterminer les translations qui appartiennent à I_D.

3) Montrer que si $g \in I_D$ possède un point fixe alors g a un point fixe sur D.

4) Soit $g \in I_D$. Montrer qu'il existe une translation t de I_D telle que $g \circ t$ possède un point fixe.

5) Décrire I_D.

Exercice n°7 *(Capes 2020 - Première épreuve)*

A, B, C, D sont les sommets d'un carré du plan $\mathscr{P}$. On note Q l'ensemble $\{A, B, C, D\}$.
On se propose de déterminer l'ensemble I(Q) des isométries du plan $\mathscr{P}$ qui conservent globalement l'ensemble Q. Parmi elles, $\mathrm{I}^+(Q)$ désigne l'ensemble de celles qui sont directes et $\mathrm{I}^-(Q)$ l'ensemble de celles qui sont indirectes. La médiatrice du segment $[BC]$ est notée Δ et s_Δ désigne la réflexion d'axe Δ.

1) Montrer que $\mathrm{I}(Q)$ et $\mathrm{I}^+(Q)$ munis de la composition des applications sont des groupes. En est-il de même pour $\mathrm{I}^-(Q)$?

2) Montrer que l'application $F : I^+(Q) \longrightarrow I^-(Q)$, $f \longmapsto s_\Delta \circ f$ est bijective.

3) Démontrer que $\mathrm{I}^+(Q)$ contient exactement quatre éléments. Donner la liste de ces éléments et la table du groupe $\mathrm{I}^+(Q)$.

4) Préciser les caractéristiques géométriques de chacune des isométries de $\mathrm{I}(Q)$.

Exercice n°8 *(Capes 2007 - Deuxième épreuve)*

1) Soit $\mathscr{E}$ un plan affine euclidien orienté. Soit $p \in \mathbb{N}, p \geqslant 2$. On appelle groupe diédral d'ordre $2p$, noté D_{2p}, le groupe des isométries laissant invariant un polygône régulier $P_p = \{M_0, \cdots, M_{p-1}\}$ à p sommets, parcourus dans le sens direct. On posera $M_p = M_0$.

- **a)** Montrer que le sous-groupe C_p de D_{2p} constitué des isométries directes, est un groupe cyclique d'ordre p engendré par la rotation ρ de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{p}$ où O est le centre du polygône P_p.
- **b)** Préciser une symétrie orthogonale σ laissant le polygône P_p invariant.
- **c)** Montrer que
$$D_{2p} = \left\{\rho^i \circ \sigma^j ; i \in \{0, \cdots, p-1\} \text{ et } j \in \{0, 1\}\right\}$$
et en déduire que D_{2p} est un groupe d'ordre $2p$.
- **d)** Soit $k \in \{0, \cdots, p-1\}$. Montrer que $\sigma \circ \rho^k \circ \sigma = \rho^{p-k}$.

2) Soit G un groupe fini engendré par deux éléments distincts s et s' d'ordre 2. On pose $r = ss'$ et on note p l'ordre de r. On note e l'élément neutre de G.

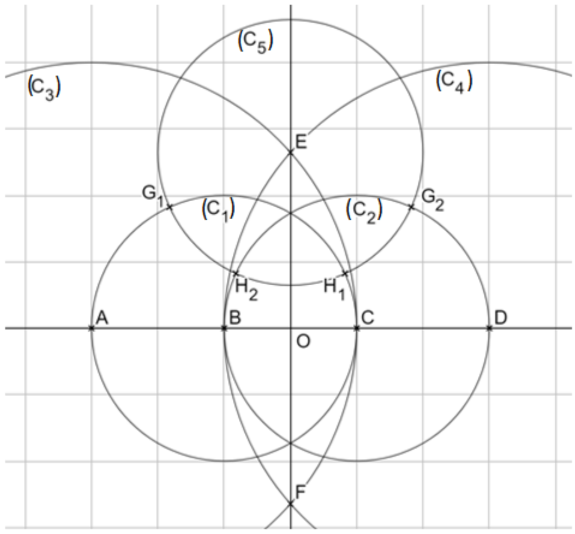
- **a)** Montrer que G est engendré par r et s.
- **b)** Établir que $sr = r^{-1}s$, puis que $srk = r^{p-k}s$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En déduire que
$$G = \left\{r^i s^j ; i \in \{0, \cdots, p-1\} \text{ et } j \in \{0, 1\}\right\}$$
- **c)** Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}, s \neq r^k$ (on pourra raisonner par l'absurde et montrer que G serait commutatif, puis que $G = \{e, r\}$). En déduire que G est d'ordre $2p$.
- **d)** Montrer que G est isomorphe à D_{2p}.

Exercice n°9 *(Mayotte 2022 - Première épreuve)*

1) Construction d'un pentagone paveur. *Certains trottoirs de la ville du Caire sont pavés de pièces pentagonales non régulières. On s'intéresse à celles dont les cinq côtés ont même longueur.*

Dans un repère orthonormé du plan, on considère les points $A\left(-\frac{3}{2};0\right)$, $B\left(-\frac{1}{2};0\right)$, $C\left(\frac{1}{2};0\right)$ et $D\left(\frac{3}{2};0\right)$.

On construit :
- (C_1) le cercle de centre B et de rayon 1 ;
- (C_2) le cercle de centre C et de rayon 1 ;
- (C_3) le cercle de centre A et de rayon 2 ;
- (C_4) le cercle de centre D et de rayon 2 ;
- E et F les points d'intersection des cercles (C_3) et (C_4) tels que E est d'ordonnée positive ;
- (C_5) le cercle de centre E et de rayon 1 ;
- G_1 et H_1 les points d'intersection de (C_5) avec (C_1) tels que G_1 est d'abscisse négative ;
- G_2 et H_2 les points d'intersection de (C_5) avec (C_2) tels que G_2 est d'abscisse positive.



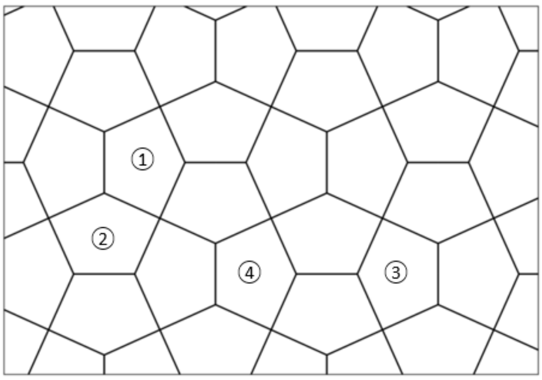
L'élément de pavage étudié est le pentagone BCG_2EG_1.

a) Démontrer que E a pour coordonnées $\left(0\,;\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$.

b) Démontrer que l'angle $\widehat{BG_1E}$ est droit.

c) Déterminer une équation cartésienne de chacun des cercles (C_1) et (C_5) puis justifier que le point G_1 a pour coordonnées $\left(\frac{-\sqrt{7}-1}{4};\frac{\sqrt{7}+1}{4}\right)$.

2) Pavage. On admet que le pentagone construit dans la question 1) permet de paver le plan. Quatre copies du motif pentagonal numérotées 1,2,3,4 ont été mises en évidence sur la figure ci-dessous.



a) Déterminer une transformation du plan permettant de construire le pentagone 2 à partir du pentagone 1. En préciser les éléments caractéristiques.

b) Déterminer de même une transformation du plan permettant de construire le pentagone 3 à partir du pentagone 1.

c) Déterminer de même une transformation du plan permettant de construire le pentagone 4 à partir du pentagone 1.

Exercice n°10 *Isométries conservant le pentagone régulier*

$ABCDE$ est un pentagone régulier de côté 1, inscrit dans un cercle de centre O.
On note $\mathscr{P}$ l'ensemble $\{A, B, C, D, E\}$.
On se propose de déterminer l'ensemble $\mathrm{I}(\mathscr{P})$ des isométries du plan qui conservent globalement l'ensemble $\mathscr{P}$. Parmi elles, $\mathrm{I}^+(\mathscr{P})$ désigne l'ensemble de celles qui sont directes et $\mathrm{I}^-(\mathscr{P})$ l'ensemble de celles qui sont indirectes. La médiatrice du segment $[BC]$ est notée Δ et s_Δ désigne la réflexion d'axe Δ.

1) Montrer que $\mathrm{I}(\mathscr{P})$ et $\mathrm{I}^+(\mathscr{P})$ munis de la composition des applications sont des groupes. En est-il de même pour $\mathrm{I}^-(\mathscr{P})$?

2) Montrer que $F : \mathrm{I}^+(\mathscr{P}) \longrightarrow \mathrm{I}^-(\mathscr{P}),\ f \longmapsto s_\Delta \circ f$ est une application bijective.

3) Soit f un élément de $\mathrm{I}(\mathscr{P})$.

a) Démontrer que le point O est l'isobarycentre de $\mathscr{P}$. En déduire que $f(O) = O$.

b) Démontrer que $\mathrm{I}^+(\mathscr{P})$ contient exactement cinq éléments. Donner la liste de ces éléments et la table du groupe $\mathrm{I}^+(\mathscr{P})$. À quel groupe connu $\mathrm{I}^+(\mathscr{P})$ est-il isomorphe ?

c) Préciser finalement les caractéristiques géométriques de chacune des isométries de $\mathrm{I}(\mathscr{P})$.