Université de Rennes

Algèbre et Géométrie 2

Feuille d'exercices de géométrie n°1

Géométrie complexe

Révisions n°1

- Interpréter géométriquement le module et de l'argument d'un nombre complexe (faire le lien avec les coordonnées polaires).
- Comment caractériser l'alignement, le parallélisme, l'orthogonalité, à l'aide des nombres complexes ?

Exercice n°1

Mettre sous forme trigonométrique $1 + e^{i\theta}$ où $\theta \in]-\pi, \pi[$. Donner une interprétation géométrique.

Exercice n°2

Montrer que l'ensemble des points d'affixe z solution de $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ est un cercle que l'on précisera.

Exercice n°3 (*CAPES 2023 - Première épreuve*)

Vrai ou Faux ?

1) Dans le plan affine euclidien muni d'un repère cartésien orthonormé, l'ensemble des points d'affixe z tels que $|z-2| = |z+1|$ est réduit au point d'affixe $\dfrac{1}{2}$.

2) Dans le plan affine euclidien orienté muni d'un repère cartésien orthonormé direct d'origine O, on considère les points A et B d'affixes respectives $\sqrt{3} - i$ et $\sqrt{3} + i$. L'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ mesure $\dfrac{\pi}{3}$ modulo 2π.

Exercice n°4

Déterminer l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z est telle que le nombre $u = \dfrac{1+z}{\bar{z}}$ soit réel.

Exercice n°5

Soit $ABCD$ un parallélogramme. Montrer, que $AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2BC^2$.

Exercice n°6 (*CAPES 2008 - Oral 2*)

1) Les nombres complexes a_1, a_2, a_3 et a_4 sont donnés. Résoudre le système d'inconnue $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4$:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 &= a_1 \\ z_2 + z_3 &= a_2 \\ z_3 + z_4 &= a_3 \\ z_4 + z_1 &= a_4 \end{cases}$$

2) Dans le plan, on considère un quadrilatère $A_1A_2A_3A_4$. Montrer qu'il existe un quadrilatère $M_1M_2M_3M_4$ dont les milieux des côtés sont les points A_1, A_2, A_3 et A_4 si et seulement si le quadrilatère $A_1A_2A_3A_4$ est un parallélogramme. Montrer que, dans ce cas, le point de concours des diagonales du parallélogramme $A_1A_2A_3A_4$ est l'isobarycentre des points M_1, M_2, M_3 et M_4.

Exercice n°7 (*Mayotte 2021 - Seconde composition*)
Vrai ou Faux. Dans le plan complexe, on considère les points M, N, P d'affixes respectives $1+3i$, $5+4i$, $2-i$. **Proposition :** le triangle MNP est isocèle rectangle en M.

Exercice n°8 (*CAPLP 2024*)
Vrai ou Faux. Dans le plan complexe, on considère les points $A(-2i)$, $B(-2+3i)$ et $C(3+i)$.
Proposition : Le triangle ABC est isocèle.

Exercice n°9

1) Trouver les $z \in \mathbb{C}$ tels que les points d'affixes 1, z et z^4 soient alignés.

2) Trouver les $z \in \mathbb{C}$ tels que 1, z^2 et z^4 soient les affixes des sommets d'un triangle équilatéral.

3) Déterminer z pour que les points d'affixes z, z^2 et z^3 soient les sommets d'un triangle rectangle.

Exercice n°10 (*CAPES 2008 - Oral 2*)
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On note (Γ) le cercle de centre O et de rayon 1.

1) Soit A un point de (Γ) d'affixe a. On note (T_a) la tangente en A à (Γ).
Soit M un point du plan d'affixe z.

a) Montrer que M appartient à (T_a) si et seulement si $\dfrac{z-a}{a}$ est imaginaire pur.

b) En déduire que M appartient à (T_a) si et seulement si z vérifie l'égalité : $z\bar{a}+\bar{z}a=2$.

2) Soit A d'affixe a et B d'affixe b deux points distincts de (Γ) tels que $a+b \neq 0$.
Montrer que les droites (T_a) et (T_b), tangentes à (Γ) respectivement en A et B, sont sécantes et que leur point d'intersection a pour affixe $\dfrac{2ab}{a+b}$.

Exercice n°11 (*Mayotte 2022 - Seconde composition*)
Vrai ou Faux. À tout nombre complexe $z \neq 3$, on associe le nombre complexe z' défini par : $z' = \dfrac{z-5+i}{z-3}$.
Proposition : L'ensemble des points M d'affixe z tel que $|z'| = 1$ est une droite privée d'un point.

Exercice n°12

1) Montrer que toute droite a une équation complexe de la forme $az + \bar{a}\bar{z} = b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Montrer réciproquement que l'ensemble des points dont l'affixe z vérifie $az+\bar{a}\bar{z} = b$ ($a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{R}$) est la droite passant par $M_0(\dfrac{b}{2a})$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(\bar{a})$.

2) Déterminer l'ensemble $E = \{M(z), az + b\bar{z} = c\}$ où $c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

Révisions n°2

- Donner les expressions complexes des translations et des homothéties du plan. Démontrer les résultats.
- Donner l'expression complexe d'une rotation du plan

Exercice n°13

1) Soit A, B, C trois points du plan complexe dont les affixes sont respectivement a, b, c. On suppose que $a + jb + j^2c = 0$; montrer que ABC est un triangle équilatéral. Étudier la réciproque.

2) Montrer que ABC est équilatéral si et seulement si : $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.

3) ABC étant un triangle équilatéral direct du plan complexe, on construit les triangles équilatéraux directs BOD et OCE, ce qui détermine les points D et E (O est l'origine du plan complexe). Quelle est la nature du quadrilatère $ADOE$? Comparer les triangles OBC, DBA et EAC.

Exercice n°14

Soit $(A_0, A_1, A_2, A_3, A_4)$ un pentagone régulier. On note O son centre et on choisit un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ avec $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA_0}$, qui nous permet d'identifier le plan avec l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.

1) Donner les affixes $\omega_0, \ldots, \omega_4$ des points $A_0, \ldots, A_4$. Montrer que $\omega_k = {\omega_1}^k$ pour $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Montrer que $1 + \omega_1 + \omega_1^2 + \omega_1^3 + \omega_1^4 = 0$.

2) En déduire que $\cos(\frac{2\pi}{5})$ est l'une des solutions de l'équation $4z^2 + 2z - 1 = 0$. En déduire la valeur de $\cos(\frac{2\pi}{5})$.

3) On considère le point B d'affixe -1. Calculer la longueur BA_2 en fonction de $\sin\frac{\pi}{10}$ puis de $\sqrt{5}$ (on remarquera que $\sin\frac{\pi}{10} = \cos\frac{2\pi}{5}$).

4) On considère le point I d'affixe $\frac{i}{2}$, le cercle $\mathscr{C}$ de centre I de rayon $\frac{1}{2}$ et enfin le point J d'intersection de $\mathscr{C}$ avec la demi-droite $[BI)$. Calculer la longueur BI puis la longueur BJ.

5) Construire un pentagone régulier à la règle et au compas. Expliquer.

Exercice n°15 (*CAPES 2011 - Oral 2*)

On considère un triangle ABC direct sur lequel on construit extérieurement trois triangles équilatéraux BCA', ACB' et ABC' et on note P, Q et R les centres de gravité respectifs des triangles BCA', ACB' et ABC'.
Soient a, b, c, a', b', c', p, q et r les affixes respectives des points A, B, C, A', B', C', P, Q et R.

1) Exprimer a', b' et c' en fonction de a, b et c.

2) Montrer que les triangles ABC, $A'B'C'$ et PQR ont le même centre de gravité.

Exercice n°16 (*CAPES 2006 - Oral 2*)

On se donne un rectangle $ABCD$ (direct) et on pose $AB = CD = a$, $AD = BC = b$ $(a > 0, b > 0)$. On se pose le problème suivant (voir figure 1) : existe-t-il un triangle équilatéral APQ inscrit dans le rectangle $ABCD$ (le point P appartenant au segment $[BC]$et le point Q au segment $[CD]$) ?

1) Soit P un point quelconque de $[BC]$ et Q un point quelconque du segment $[CD]$. On pose $DQ = x$ et $BP = y$. Montrer que APQ est équilatéral si et seulement si $x = 2a - b\sqrt{3}$ et $y = 2b - a\sqrt{3}$.

2) En déduire que le problème a une solution si et seulement si $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqslant \dfrac{a}{b} \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ et qu'alors elle est unique.

3) On suppose que le problème posé admet une solution. On construit les triangles équilatéraux BCI et CDJ, comme indiqué figure 2. Soit P le point d'intersection des droites (AJ) et (BC), et Q le point d'intersection des droites (AI) et (CD). Montrer que APQ est le triangle équilatéral cherché.
En déduire une construction du triangle APQ à la règle et au compas.

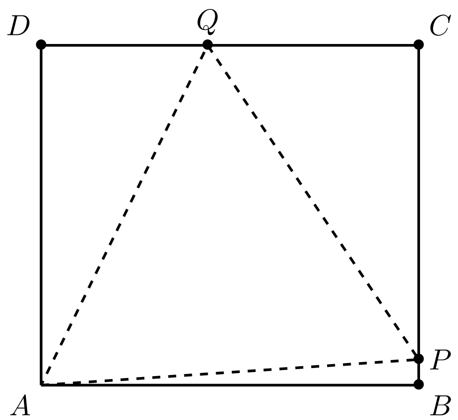

Figure 1

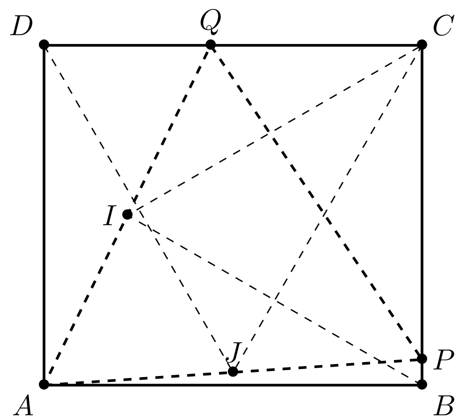

Figure 2

Exercice n°17

Donner l'expression complexe d'une réflexion d'axe (AB) avec A d'affixe a et B d'affixe b.

Exercice n°18 $(\star)$

Montrer, en n'utilisant que les nombres complexes, que les trois hauteurs d'un triangle ABC sont concourantes en un point H. Montrer que H est aligné avec le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit à ce triangle.

Exercice n°19 (*CAPES 2015 - Première épreuve*)

On se place dans le plan complexe $\mathscr{P}$. On considère trois points A, B, C d'affixes respectives a, b, c et tels que :

- Les points A, B, C ne sont pas alignés.
- Chacun des angles $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ possède une mesure appartenant à l'intervalle $[0, \frac{2\pi}{3}[$.

Sur les côtés du triangle ABC, on construit vers l'extérieur trois triangles équilatéraux $AC'B$, $BA'C$ et $CB'A$. On nomme a', b', c' les affixes respectives des points A', B', C'.

1) Faire une figure et tracer les droites (AA'), (BB') et (CC').

2) On admet que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en un point Ω strictement compris à l'intérieur du triangle ABC. En utilisant une rotation de centre A exprimer b' en fonction de a et c et b en fonction de a et c'.

3) En déduire le module et un argument de $\dfrac{b-b'}{c-c'}$.

4) Déterminer une mesure de chacun des angles $(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C})$, $(\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega A})$ et $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})$.

5) Démontrer que

$$\frac{\overrightarrow{\Omega A}}{\Omega A} + \frac{\overrightarrow{\Omega B}}{\Omega B} + \frac{\overrightarrow{\Omega C}}{\Omega C} = \overrightarrow{0}.$$

Exercice n°20 (*du déjà vu...*)

1) Soit f une application non constante du plan affine euclidien $\mathscr{P}$ dans lui même.
Montrer que f conserve le rapport des longueurs si et seulement si :

$$\exists k > 0,\, \forall (A,B) \in \mathscr{P}^2,\, \left\| \overrightarrow{f(A)f(B)} \right\| = k \left\| \overrightarrow{AB} \right\|$$

On dira alors que f est une *similitude de rapport* k.

2) Montrer que les similitudes du plan sont les composées d'une isométrie et d'une homothétie.

3) Soit $f : \mathscr{P} \longrightarrow \mathscr{P}$ une application. Montrer que f est une similitude directe (respect. indirecte) si et seulement si son expression complexe est de la forme $\varphi(z) = az + b$ (resp. $\varphi(z) = a\bar{z} + b$) avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. ($\varphi(z)$ désignant l'affixe de l'image par f du point d'affixe le nombre complexe z.)