

Algèbre et Géométrie 2

Feuille d'exercices de géométrie n°1

Géométrie complexe

Révisions n°1

- Interpréter géométriquement le module et de l'argument d'un nombre complexe (faire le lien avec les coordonnées polaires).
- Comment caractériser l'alignement, le parallélisme, l'orthogonalité, à l'aide des nombres complexes ?

Exercice n°1

Mettre sous forme trigonométrique $1 + e^{i\theta}$ où $\theta \in]-\pi, \pi[$. Donner une interprétation géométrique.

Exercice n°2

Montrer que l'ensemble des points d'affixe z solution de $\left| \frac{z-3}{z-5} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ est un cercle que l'on précisera.

Exercice n°3

Déterminer l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z est telle que le nombre $u = \frac{1+z}{\bar{z}}$ soit réel.

Exercice n°4

Soit $ABCD$ un parallélogramme. Montrer, que $AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2BC^2$.

Exercice n°5

 (*CAPES 2008 - Oral 2*)

1) Les nombres complexes a_1, a_2, a_3 et a_4 sont donnés. Résoudre le système d'inconnue $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4$:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = a_1 \\ z_2 + z_3 = a_2 \\ z_3 + z_4 = a_3 \\ z_4 + z_1 = a_4 \end{cases}$$

2) Dans le plan, on considère un quadrilatère $A_1A_2A_3A_4$. Montrer qu'il existe un quadrilatère $M_1M_2M_3M_4$ dont les milieux des côtés sont les points A_1, A_2, A_3 et A_4 si et seulement si le quadrilatère $A_1A_2A_3A_4$ est un parallélogramme. Montrer que, dans ce cas, le point de concours des diagonales du parallélogramme $A_1A_2A_3A_4$ est l'isobarycentre des points M_1, M_2, M_3 et M_4 .

Exercice n°6

 (*Mayotte 2021 - Seconde composition*)

Vrai ou Faux. Dans le plan complexe, on considère les points M, N, P d'affixes respectives $1 + 3i, 5 + 4i, 2 - i$. **Proposition** : le triangle MNP est isocèle rectangle en M .

Exercice n°7

- 1) Trouver les $z \in \mathbb{C}$ tels que les points d'affixes $1, z$ et z^4 soient alignés.
- 2) Trouver les $z \in \mathbb{C}$ tels que $1, z^2$ et z^4 soient les affixes des sommets d'un triangle équilatéral.
- 3) Déterminer z pour que les points d'affixes z, z^2 et z^3 soient les sommets d'un triangle rectangle.

Exercice n°8 (CAPES 2008 - Oral 2)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . On note (Γ) le cercle de centre O et de rayon 1.

1) Soit A un point de (Γ) d'affixe a . On note (T_a) la tangente en A à (Γ) .

Soit M un point du plan d'affixe z .

a) Montrer que M appartient à (T_a) si et seulement si $\frac{z-a}{a}$ est imaginaire pur.

b) En déduire que M appartient à (T_a) si et seulement si z vérifie l'égalité : $z\bar{a} + \bar{z}a = 2$.

2) Soit A d'affixe a et B d'affixe b deux points distincts de (Γ) tels que $a + b \neq 0$.

Montrer que les droites (T_a) et (T_b) , tangentes à (Γ) respectivement en A et B , sont sécantes et que leur point d'intersection a pour affixe $\frac{2ab}{a+b}$.

Exercice n°9 (Mayotte 2022 - Seconde composition)

Vrai ou Faux. À tout nombre complexe $z \neq 3$, on associe le nombre complexe z' défini par : $z' = \frac{z-5+i}{z-3}$.

Proposition : L'ensemble des points M d'affixe z tel que $|z'| = 1$ est une droite privée d'un point.

Exercice n°10

1) Montrer que toute droite a une équation complexe de la forme $az + \bar{a}\bar{z} = b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Montrer réciproquement que l'ensemble des points dont l'affixe z vérifie $az + \bar{a}\bar{z} = b$ ($a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{R}$) est la droite passant par $M_0(\frac{b}{2a})$ et de vecteur normal $\vec{n}(\bar{a})$.

2) Déterminer l'ensemble $E = \{M(z), az + b\bar{z} = c\}$ où $c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

Révisions n°2

- Donner les expressions complexes des translations et des homothéties du plan. Démontrer les résultats.
- Donner l'expression complexe d'une rotation du plan

Exercice n°11

1) Soit A, B, C trois points du plan complexe dont les affixes sont respectivement a, b, c . On suppose que $a + jb + j^2c = 0$; montrer que ABC est un triangle équilatéral. Étudier la réciproque.

2) Montrer que ABC est équilatéral si et seulement si : $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.

3) ABC étant un triangle équilatéral direct du plan complexe, on construit les triangles équilatéraux directs BOD et OCE , ce qui détermine les points D et E (O est l'origine du plan complexe). Quelle est la nature du quadrilatère $ADOE$? Comparer les triangles OBC, DBA et EAC .

Exercice n°12

Soit $(A_0, A_1, A_2, A_3, A_4)$ un pentagone régulier. On note O son centre et on choisit un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) avec $\vec{u} = \vec{OA}_0$, qui nous permet d'identifier le plan avec l'ensemble des nombres complexes \mathbb{C} .

1) Donner les affixes $\omega_0, \dots, \omega_4$ des points A_0, \dots, A_4 . Montrer que $\omega_k = \omega_1^k$ pour $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Montrer que $1 + \omega_1 + \omega_1^2 + \omega_1^3 + \omega_1^4 = 0$.

2) En déduire que $\cos(\frac{2\pi}{5})$ est l'une des solutions de l'équation $4z^2 + 2z - 1 = 0$. En déduire la valeur de $\cos(\frac{2\pi}{5})$.

- 3) On considère le point B d'affixe -1 . Calculer la longueur BA_2 en fonction de $\sin \frac{\pi}{10}$ puis de $\sqrt{5}$ (on remarquera que $\sin \frac{\pi}{10} = \cos \frac{2\pi}{5}$).
- 4) On considère le point I d'affixe $\frac{i}{2}$, le cercle \mathcal{C} de centre I de rayon $\frac{1}{2}$ et enfin le point J d'intersection de \mathcal{C} avec la demi-droite $[BI)$. Calculer la longueur BI puis la longueur BJ .
- 5) Construire un pentagone régulier à la règle et au compas. Expliquer.

Exercice n°13 (CAPES 2011 - Oral 2)

On considère un triangle ABC direct sur lequel on construit extérieurement trois triangles équilatéraux BCA' , ACB' et ABC' et on note P , Q et R les centres de gravité respectifs des triangles BCA' , ACB' et ABC' .

Soient $a, b, c, a', b', c', p, q$ et r les affixes respectives des points $A, B, C, A', B', C', P, Q$ et R .

- 1) Exprimer a', b' et c' en fonction de a, b et c .
- 2) Montrer que les triangles ABC , $A'B'C'$ et PQR ont le même centre de gravité.

Exercice n°14 (CAPES 2006 - Oral 2)

On se donne un rectangle $ABCD$ (direct) et on pose $AB = CD = a$, $AD = BC = b$ ($a > 0, b > 0$). On se pose le problème suivant (voir figure 1) : existe-t-il un triangle équilatéral APQ inscrit dans le rectangle $ABCD$ (le point P appartenant au segment $[BC]$ et le point Q au segment $[CD]$) ?

- 1) Soit P un point quelconque de $[BC]$ et Q un point quelconque du segment $[CD]$. On pose $DQ = x$ et $BP = y$. Montrer que APQ est équilatéral si et seulement si $x = 2a - b\sqrt{3}$ et $y = 2b - a\sqrt{3}$.
- 2) En déduire que le problème a une solution si et seulement si $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$ et qu'alors elle est unique.
- 3) On suppose que le problème posé admet une solution. On construit les triangles équilatéraux BCI et CDJ , comme indiqué figure 2. Soit P le point d'intersection des droites (AJ) et (BC) , et Q le point d'intersection des droites (AI) et (CD) . Montrer que APQ est le triangle équilatéral cherché. En déduire une construction du triangle APQ à la règle et au compas.

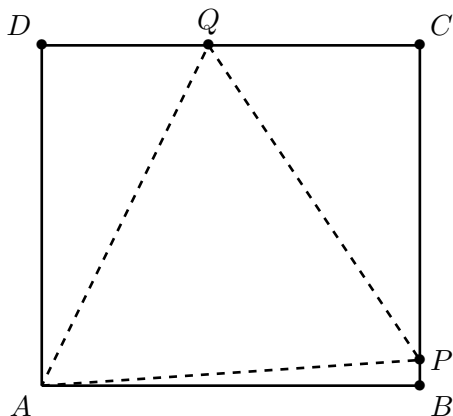


Figure 1

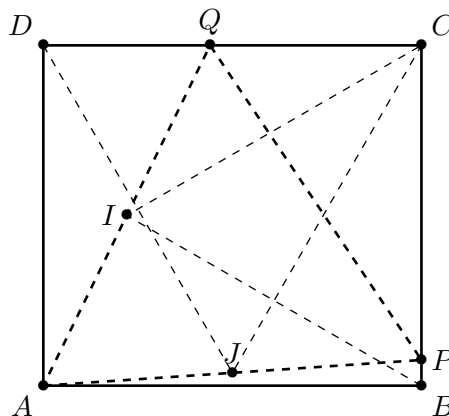


Figure 2

Exercice n°15

Donner l'expression complexe d'une réflexion d'axe (AB) avec A d'affixe a et B d'affixe b .

Exercice n°16 (★)

Montrer, en n'utilisant que les nombres complexes, que les trois hauteurs d'un triangle ABC sont concourantes en un point H . Montrer que H est aligné avec le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit à ce triangle.

Exercice n°17 (CAPES 2015 - Première épreuve)

On se place dans le plan complexe \mathcal{P} . On considère trois points A, B, C d'affixes respectives a, b, c et tels que :

- Les points A, B, C ne sont pas alignés.
- Chacun des angles $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}), (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ possède une mesure appartenant à l'intervalle $[0, \frac{2\pi}{3}[$.

Sur les côtés du triangle ABC , on construit vers l'extérieur trois triangles équilatéraux $AC'B, BA'C$ et $CB'A$. On nomme a', b', c' les affixes respectives des points A', B', C' .

- 1) Faire une figure et tracer les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') .
- 2) On admet que les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes en un point Ω strictement compris à l'intérieur du triangle ABC . En utilisant une rotation de centre A exprimer b' en fonction de a et c et b en fonction de a et c' .
- 3) En déduire le module et un argument de $\frac{b-b'}{c-c'}$.
- 4) Déterminer une mesure de chacun des angles $(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C}), (\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega A})$ et $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})$.
- 5) Démontrer que

$$\frac{\overrightarrow{\Omega A}}{\Omega A} + \frac{\overrightarrow{\Omega B}}{\Omega B} + \frac{\overrightarrow{\Omega C}}{\Omega C} = \vec{0}.$$

Exercice n°18

- 1) Soit f une application non constante du plan affine euclidien \mathcal{P} dans lui-même. Montrer que f conserve le rapport des longueurs si et seulement si :

$$\exists k > 0, \forall (A, B) \in \mathcal{P}^2, \|\overrightarrow{f(A)f(B)}\| = k \|\overrightarrow{AB}\|$$

On dira alors que f est une *similitude de rapport* k .

- 2) Montrer que les similitudes du plan sont les composées d'une isométrie et d'une homothétie.
- 3) Soit $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ une application. Montrer que f est une similitude directe (respect. indirecte) si et seulement si son expression complexe est de la forme $\varphi(z) = az + b$ (resp. $\varphi(z) = a\bar{z} + b$) avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. ($\varphi(z)$ désignant l'affixe de l'image par f du point d'affixe le nombre complexe z .)

Exercice n°19 (Mayotte 2022 - Première composition)

Soit $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}} \in \mathbb{C}$.

Dans le plan complexe, les sommets d'un pentagone régulier sont les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 d'affixes respectives $1, \omega, \omega^2, \omega^3$ et ω^4 . On pose $\alpha = \omega + \omega^4$ et $\beta = \omega^2 + \omega^3$.

- 1) Démontrer que $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$, puis que $\alpha + \beta = -1$ et $\alpha\beta = -1$. En déduire que α et β sont les solutions de l'équation [2] : $X^2 + X - 1 = 0$.
- 2) Justifier que $\omega^4 = \frac{1}{\omega}$ et que $\bar{\omega} = \frac{1}{\omega}$.
- 3) En déduire que $\alpha = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et déterminer la valeur de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ en résolvant l'équation [2].
- 4) On considère les points B d'affixe i et C d'affixe $-\frac{1}{2}$.
Le cercle de centre C passant par B coupe l'axe des réels en un point M d'abscisse positive et un point N d'abscisse négative.
 - a) Démontrer que les points M et N ont pour affixes respectives α et β .
 - b) En déduire que la médiatrice du segment $[OM]$ coupe le cercle unité en les points A_1 et A_4 .
 - c) Achever la construction du pentagone régulier $A_0A_1A_2A_3A_4$.