Université de Rennes

Algèbre et Géométrie 2

Feuille d'exercices d'algèbre n°1

Nombres complexes

Révisions

- Rappeler les propriétés du module et de l'argument d'un nombre complexe.
- En utilisant les nombres complexes, calculer $\cos(5\theta)$ et $\sin(5\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner l'expression des racines n-ièmes de l'unité. Quelle est leur somme ?
- Vérifier que $\{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$ et $\{z \in \mathbb{C},\ z^n = 1\}$ sont des groupes multiplicatifs.

Exercice n°1

Calculer le module et un argument de

1) $u = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $v = 1 - i$. En déduire le module et un argument de $w = \frac{u}{v}$.

2) $u = e^{i\theta} + e^{2i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice n°2 (*CAPES - Première épreuve 2015*)

On considère un entier naturel n non nul.

1) Justifier que, pour tout nombre complexe z, $Re(z) \leqslant |z|$ et étudier le cas d'égalité.

2) Démontrer que, pour tout couple (z_1, z_2) de nombres complexes, $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.

3) On suppose que z_1 et z_2 sont des nombres complexes non nuls. Montrer que l'inégalité précédente est une égalité si et seulement s'il existe un réel positif λ tel que $z_2 = \lambda z_1$. Interpréter ce résultat en termes d'argument.

4) Démontrer que, pour tout n-uplet $(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ de nombres complexes, $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |z_k|$.

5) Montrer que, si $z_1, z_2, \cdots, z_n$ sont des nombres complexes tous non nuls, l'inégalité précédente est une égalité si et seulement si : $\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \exists \lambda_k \in \mathbb{R}_+, \quad z_k = \lambda_k z_1$.
Interpréter ce résultat en termes d'arguments.

Exercice n°3

Soit n un entier naturel non nul et a un nombre complexe.
On considère l'équation (E) d'inconnue complexe z : $\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)^n = a$

a) Montrer que si (E) admet une solution réelle alors $|a| = 1$.

b) Démontrer que si (E) admet une solution réelle alors toutes ses solutions sont réelles.

Exercice n°4 (*CAPESA - Première épreuve 2021*)

Vrai ou Faux ? Pour $z \in \mathbb{C}$, on a $\left|\dfrac{z+i}{z-i}\right| = 1$ si et seulement si z est réel.

Exercice n°5

Trouver l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z est telle que le nombre $u = \left(\dfrac{z+1+i}{2z+1-i}\right)^2$ soit réel.

Exercice n°6

1) Soit z un nombre complexe non nul de module r et d'argument θ.
Calculer $|1+z|$ en fonction de r et de θ. En déduire $|1+z^2|$ en fonction de r et de θ.

2) Déterminer l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z est telle que $|1+z^2| = |1+z|^2 - 2$.

Exercice n°7

Soit z un nombre complexe tel que $|z| \leqslant 2$. Quel est le maximum possible pour $|1+z+z^2+z^3|$?
Pour quelles valeurs de z ce maximum possible est-il atteint ?

Exercice n°8

Calculer les racines carrées de $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$. En déduire les valeurs de $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.

Exercice n°9 (*CAPES - Deuxième épreuve 2009*)

On considère les nombres complexes $a_0 = 6-2i$, $a_1 = -3-5i$, $a_2 = -2+3i$, et on définit le polynôme $p(X) \in \mathbb{C}[X]$ par : $p(X) = X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$

1) Montrer que $p(X)$ possède une racine réelle.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + 3iz - 3 + i = 0$

3) Vérifier que les racines de $p(X)$ appartiennent au disque fermé de centre O et de rayon R où l'on a $R = \max\{|a_0|, 1+|a_1|, 1+|a_2|\}$.

Exercice n°10

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $z^2 - \sqrt{3}z - i = 0$

2) $z^3 = \frac{1}{4}(-1+i)$. Montrer qu'une seule des solutions a une puissance quatrième réelle.

3) $z^4 + 2z^2 + 4 = 0$.

4) $z^6 + (7-i)z^3 - 8 - 8i = 0$.

Exercice n°11

Soit n un entier naturel.
1) Calculer, suivant les valeurs du réel x, les sommes : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$.

2) On suppose $n \geqslant 2$. Montrer que : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$.

Exercice n°12 ($\star$)

Soit $\mathbb{Z}[i] = \{a+ib\ ,\ (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

1) Montrer que si α et β sont dans $\mathbb{Z}[i]$ alors $\alpha+\beta$ et $\alpha\beta$ le sont aussi.

2) Trouver les élements inversibles de $\mathbb{Z}[i]$, c'est-à-dire les éléments $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ pour lesquels il existe $\beta \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $\alpha\beta = 1$.

3) Vérifier que quel que soit $\omega \in \mathbb{C}$ il existe $z \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $|\omega - z| < 1$.

4) Montrer qu'il existe sur $\mathbb{Z}[i]$ une division euclidienne, c'est-à-dire que, quels que soient α et β dans $\mathbb{Z}[i]$ il existe q et r dans $\mathbb{Z}[i]$ vérifiant :

$$\alpha = \beta q + r \qquad \text{avec} \qquad |r| < |\beta|.$$

(Indication : on pourra considérer le complexe $\dfrac{\alpha}{\beta}$.)