UNIVERSITÉ DE RENNES 1

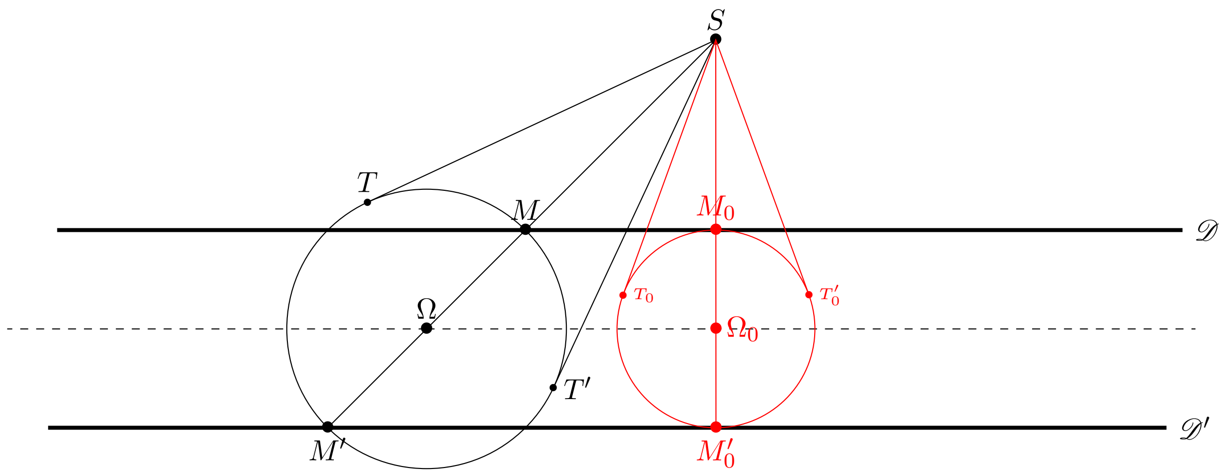
Algèbre et Géométrie 1

Feuille d'exercices de géométrie n°2

Homothéties - Similitudes

Exercice n°10

1)



2) • On pouvait par exemple dire qu'une similitude directe s est caractérisée par son centre, son rapport et son angle. L'unique similitude solution est donc celle de centre S, de rapport $k = \dfrac{S\Omega}{S\Omega_0}$ et d'angle $\alpha = (\widehat{\overrightarrow{S\Omega_0}, \overrightarrow{S\Omega}})$ *Cet angle est un angle orienté de vecteurs et non pas un angle géométrique qui est insuffisant pour caractériser une rotation de centre donné.*

• On pouvait également dire qu'une similitude directe est caractérisée par son expression complexe φ donc par les complexes a et b (avec $a \neq 0$) tels que $\varphi(z) = az + b$. Une telle similitude est de centre S (d'affixe c) et envoie Ω_0 (d'affixe ω_0) sur Ω (d'affixe ω) si et seulement si $\begin{cases} c = ac + b \\ \omega = a\omega_0 + b \end{cases}$ Comme $\Omega_0 \neq S$, il est clair que ce dernier système a une unique solution.

Montrons que cette similitude transforme M_0 en M. Il est déjà clair que $(\Omega\Omega_0) // \mathscr{D} = (M_0M)$. (*Petit exercice classique utilisant au choix la droite des milieux dans un triangle ou la réciproque du théorème de Thalès puisque* $\dfrac{M\Omega}{MM'} = \dfrac{M_0\Omega_0}{M_0M'_0}(= \dfrac{1}{2})$.)

Le théorème de Thalès dans le triangle $S\Omega\Omega_0$ donne alors $\dfrac{SM}{SM_0} = \dfrac{S\Omega}{S\Omega_0} = k$. De plus $M \in [S\Omega]$ et $M_0 \in [S\Omega_0]$ donc $(\widehat{\overrightarrow{SM_0}, \overrightarrow{SM}}) = (\widehat{\overrightarrow{S\Omega_0}, \overrightarrow{S\Omega}}) = \alpha$. On a bien $s(M_0) = M$.

Montrons que cette similitude transforme T_0 en T.

L'image par la similitude s du cercle $\mathscr{C}_0$ de centre Ω_0 et de rayon Ω_0M_0 est le cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega = s(\Omega_0)$ et de rayon $\Omega M = k\Omega_0M_0$ c'est à dire le cercle de diamètre $[MM']$.

• On peut alors invoquer la conservation du contact (entre un cercle et une droite) par une similitude, pour obtenir $s(T_0) \in \{T, T'\}$. On pouvait retrouver ce résultat en utilisant le fait qu'une similitude conserve l'orthogonalité pour vérifier qu'une tangente à $\mathscr{C}_0$ est transformée en une tangente à $\mathscr{C}$.

• On pouvait aussi remarquer que $S\Omega_0T_0$ est rectangle en T_0 donc T_0 appartient au cercle de diamètre $[S\Omega_0]$, cercle qui est transformé par s en le cercle de diamètre $[S\Omega]$ (ce dernier cercle intersectant $\mathscr{C}$ en T et T').

Dans les deux cas on concluait que $s(T_0) = T$ par conservation des angles orientés de vecteurs (s étant directe).

3) Soit donc s_0 la similitude directe de centre S qui transforme Ω_0 en T_0.

La relation de Chasles sur les angles donne $(\widehat{\overrightarrow{S\Omega_0}, \overrightarrow{ST_0}}) = (\widehat{\overrightarrow{S\Omega_0}, \overrightarrow{S\Omega}}) + (\widehat{\overrightarrow{S\Omega}, \overrightarrow{ST_0}})$ et donc, d'après la question précédente, $(\widehat{\overrightarrow{S\Omega_0}, \overrightarrow{ST_0}}) = (\widehat{\overrightarrow{ST_0}, \overrightarrow{ST}}) + (\widehat{\overrightarrow{S\Omega}, \overrightarrow{ST_0}}) = (\widehat{\overrightarrow{S\Omega}, \overrightarrow{ST}})$.

De même, $\dfrac{ST_0}{S\Omega_0} = \dfrac{S\Omega}{S\Omega_0}.\dfrac{ST_0}{S\Omega}$ donc $\dfrac{ST_0}{S\Omega_0} = \dfrac{ST}{ST_0}.\dfrac{ST_0}{S\Omega} = \dfrac{ST}{S\Omega}$. On a donc bien $s_0(\Omega) = T$.

4) Le lieu du point Ω lorsque la sécante passant par S varie n'est autre que la droite paralléle à $\mathscr{D}$ passant par Ω_0 (c'est à dire l'axe de la réflexion qui échange $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$). D'après la question précédente, le lieu du point T est l'image de cette droite par la similitude s_0. C'est donc la droite (T_0T). Or $(S\Omega_0) \perp (\Omega_0\Omega)$ donc (s_0 conserve l'orthogonalité) $(ST_0) \perp (T_0T)$. Comme $(ST_0) \perp (T_0\Omega_0)$, on a $(T_0T)//(T_0\Omega)$ et le lieu du point T est finalement la droite (Ω_0T_0). *(Droite en bleu sur la figure ci-dessous.)*

De même, le lieu de T' est la droite $(\Omega_0T'_0)$. *(Droite en vert sur la figure ci-dessous.)*