UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre et Géométrie 1

Feuille d'exercices de géométrie n°3

Barycentres

Exercice n°1 *(Capes 2020 - Première épreuve)*

Soit n un entier naturel non nul et $((P_0,\alpha_0),...,(P_n,\alpha_n))$ un système de $n+1$ points pondérés du plan affine euclidien $\mathscr{P}$, de poids total $\alpha = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k$.

1) On note f l'application de $\mathscr{P}$ dans $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ qui, à tout point M de $\mathscr{P}$ associe le vecteur $f(M) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MP_i}$

- **a)** Soit M et N deux points de $\mathscr{P}$. Démontrer l'égalité vectorielle $f(N) = f(M) + \alpha\overrightarrow{NM}$.
- **b)** Démontrer que, si $\alpha \neq 0$, alors f est injective et surjective.
- **c)** En déduire que f est bijective si et seulement si $\alpha \neq 0$.

2) On suppose α non nul. Montrer qu'il existe un unique point G tel que $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GP_i} = \overrightarrow{0}$

Révisions

1) Rappeler et démontrer les propriétés d'***homogénéité*** et d'***associativité du barycentre***.

2) Comment caractériser une droite (respectivement un segment) à l'aide des barycentres ?

3) Qu'appelle-t-on partie ***convexe*** du plan (respectivement de l'espace) ?

Exercice n°2

1) Montrer que les trois médianes d'un triangle sont concourantes en le centre de gravité du triangle.

2) Soient $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension 3, et $ABCD$ un tétraèdre de $\mathscr{E}$. Montrer que les droites joignant les milieux des côtés opposés du tétraèdre sont concourantes.

3) *(BAC S - 2011)* Dans cette question, $ABCD$ est un tétraèdre régulier. A$'$ est le centre de gravité du triangle BCD. Soit G l'isobarycentre des points A, B, C et D. On souhaite démontrer la propriété

($\mathscr{P}$) : *Les médianes d'un tétraèdre régulier sont concourantes en G.*

En utilisant l'associativité du barycentre, montrer que G appartient à la droite (AA'), puis conclure.

Exercice n°3

On se place dans un espace affine euclidien $\mathscr{A}$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(A_1,\cdots,A_n) \in \mathscr{A}^n$. On considère l'application $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout M de $\mathscr{A}$ par $F(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i {MA_i}^2$.

1) On suppose $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$. Montrer qu'il existe un vecteur $\overrightarrow{v}$ de $\overrightarrow{\mathscr{A}}$, tel que

$$\forall (M,M') \in \mathscr{A}^2,\ F(M') = F(M) + 2 < \overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{v} > \quad (\overrightarrow{v} \text{ indépendant de } M \text{ et } M')$$

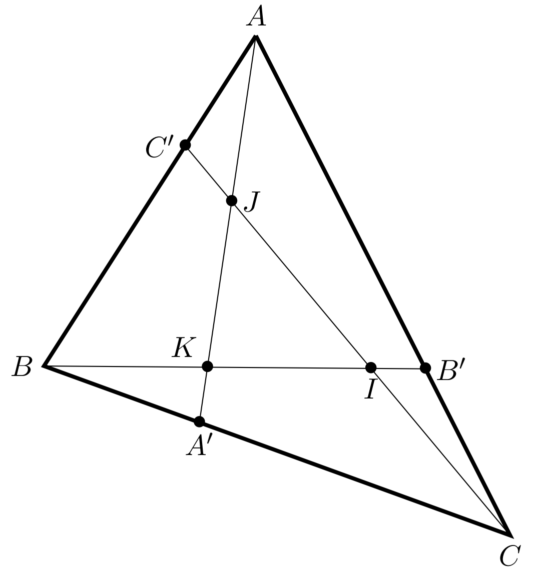
Pour $k \in \mathbb{R}$, en déduire la nature de l'ensemble des points M de $\mathscr{A}$ tels que ${MA_1}^2 - {MA_2}^2 = k$. *(On prendra garde aux cas particuliers.)*

2) On suppose à présent que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$. Montrer que $F(M) = F(G) + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) MG^2$ où G est le barycentre du système $\{(A_1, \alpha_1), \cdots, (A_n, \alpha_n)\}$.

En déduire, pour $k \in \mathbb{R}$, la nature de l'ensemble des points M de $\mathscr{A}$ tels que $MA_1{}^2 + MA_2{}^2 = k$.

Exercice n°4 *(Capes 2006 - Épreuve sur dossier)*

Soit ABC un triangle du plan.
Les points A', B' et C' sont respectivement définis par $\overrightarrow{AC'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CB'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$.
Les droites (AA') et (BB') se coupent en un point K, les droites (BB') et (CC') se coupent en un point I et les droites (AA') et (CC') en un point J.



1) Écrire les points A', B' et C' comme barycentres des points A, B et C.

2) Montrer que le point I est barycentre de $(A, 2)$, $(B, 1)$ et $(C, 4)$.

3) Définir de même les points J et K comme barycentres de A, B et C.

4) Montrer que les points I, J et K sont respectivement les milieux de $[CJ]$, $[AK]$ et $[BI]$.

Exercice n°5

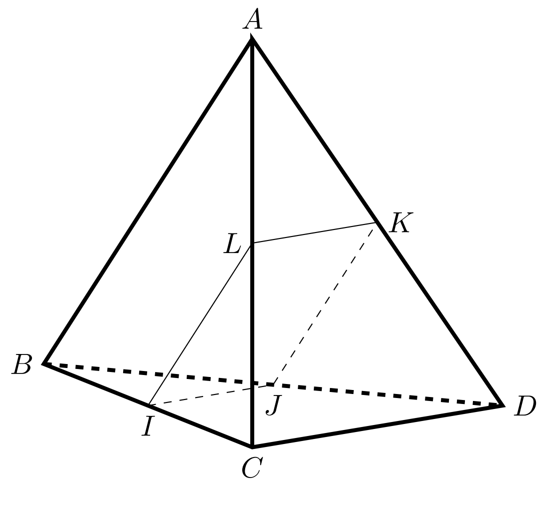
Soit ABC un triangle et $\mathscr{C}$ son cercle inscrit. On note D, E et F les points de contact respectifs de $\mathscr{C}$ avec les droites (BC), (CA) et (AB). Montrer que les droites (AD), (BE) et (CF) sont concourantes en un point appelé ***point de Gergonne*** du triangle ABC. *(On pourra introduire le barycentre de $\{(A, \frac{1}{AE}), (B, \frac{1}{BF}), (C, \frac{1}{CD})\}$.)*

Exercice n°6

Sur la figure ci-contre, $ABCD$ est un tétraèdre et I, J, K, L sont les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[BD]$, $[AD]$, $[AC]$.

1) Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et M un point de l'espace. Montrer que le point M est le barycentre du système $\{(A, x), (B, 1-x), (C, 1-y), (D, y)\}$ si et seulement si on a $2\overrightarrow{IM} = x\overrightarrow{BA} + y\overrightarrow{CD}$.

2) Montrer que l'ensemble des milieux M des segments $[PQ]$ où P décrit le segment $[AB]$ et Q le segment $[CD]$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{IM} = x\overrightarrow{IL} + y\overrightarrow{IJ}$ où x et y décrivent $[0, 1]$.
Décrire géométriquement cet ensemble de points.



Exercice n°7 (CAPES 2009 - Deuxième composition)

On dit qu'une partie Γ du plan $\mathscr{P}$ est ***convexe*** si pour tout couple (A, B) de points de Γ, le segment $[AB]$ est contenu dans Γ : c'est à dire, en notant a et b les affixes respectives des points A et B, si pour tout $\lambda \in [0, 1]$, le point M_λ d'affixe $\lambda a + (1-\lambda)b$ appartient à Γ. *(En particulier, l'ensemble vide est convexe)*.

1) Soit P une partie de $\mathscr{P}$ et E l'ensemble des parties de $\mathscr{P}$ qui sont convexes et qui contiennent P. On pose $\mathscr{E}(P) = \bigcap_{\Gamma \in E} \Gamma$. Montrer que $\mathscr{E}(P)$ est la plus petite (au sens de l'inclusion) partie convexe contenant P. Cette partie $\mathscr{E}(P)$ est appelée l'***enveloppe convexe*** de P.

2) Soit P une partie non vide de $\mathscr{P}$ et notons $\mathscr{B}$ l'ensemble des barycentres de familles finies de points de $\mathscr{P}$ affectés de coefficients positifs. Montrer que $\mathscr{E}(P) = \mathscr{B}$.