UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre et Géométrie 1

Feuille d'exercices de géométrie n°2

Homothéties - Similitudes

Exercice n°5

1) La condition est clairement suffisante. Non ?
Supposons donc que f conserve les rapports des longueurs et soit (M, N) tel que $f(M) \neq N$ (f est supposée non constante) et posons $k = \dfrac{f(M)f(N)}{MN}$. Pour tout couple (A, B) de points, on a $\dfrac{f(A)f(B)}{f(M)f(N)} = \dfrac{AB}{MN}$ et donc $f(A)f(B) = kAB$.

2) Si A et B sont fixes par la similitude f de rapport k alors $\left\|\overrightarrow{f(A)f(B)}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ et donc $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = k\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ soit $k = 1$ et f est donc une isométrie. Cette isométrie fixe de plus deux points distincts : c'est l'identité ou la réflexion d'axe (AB).

3) Il est clair que la composée d'une homothétie de rapport k et d'une isométrie multiplie les distances par $|k|$ donc est une similitude. Réciproquement, si g est une similitude de rapport $k > 0$, en notant h une homothétie de rapport $\frac{1}{k}$, $g = h \circ f$ multiplie les distances par 1 donc est une isométrie.
Le résultat en découle puisque $f = h^{-1} \circ g$.

4) Cela résulte de la question précédente puisque

- une isométrie (respectivement une homothétie) est une bijection d'inverse une isométrie (respectivement une homothétie)
- la composée de deux applications conservant le rapport des longueurs conserve encore le rapport des longueurs.

L'ensemble des similitudes du plan est donc un sous-groupe du groupe des transformations du plan.

5) $\Longleftarrow$: Dans les deux cas on a, pour $z \neq z'$, $|\varphi(z') - \varphi(z)| = |a| \, . \, |z' - z|$ donc φ est bien l'écriture complexe d'une similitude (de rapport $|a|$).

$\Longrightarrow$: Soit réciproquement f une similitude de rapport k. Fixons le point O d'affixe 0 et le point A d'affixe 1. Soit M un point quelconque, d'affixe z. En primant les images par f des points et en notant en minuscule les affixes des points, on traduit les égalités $\dfrac{O'M'}{O'A'} = \dfrac{OM}{OA}$ (conservation des rapports de longueurs) et, en oubliant le cas $M = O$, $(\widehat{\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'M'}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}}) \, [2\pi]$ (conservation des angles orientés de vecteurs, en supposant par exemple que la similitude f est directe) sous la forme $\left|\dfrac{z'-o'}{a'-o'}\right| = |z|$ et $arg\left(\dfrac{z'-o'}{a'-o'}\right) \equiv arg(z) \, [2\pi]$. On a donc $\dfrac{z'-o'}{a'-o'} = z$ soit $z' = Az + B$ où $A = (a' - o')$ et $B = o'$.
Ce résultat est encore valable si $M = O$.
Remarque : Une isométrie étant une similitude de rapport 1, elle a une expression complexe de la même forme, avec $|a| = 1$.

6) Si f est une similitude de rapport distinct de 1 alors, avec les notations précédentes, $|a| \neq 1$ et f a bien un unique point fixe dont l'affixe est soit $\omega = \frac{b}{1-a}$ (si f est directe) soit $\omega = \frac{a\bar{b}+b}{1-|a|^2}$ (si f est indirecte).

L'homothétie de la décomposition est alors parfaitement déterminée par f : son centre est le point fixe de f et son rapport le rapport de f.
$g = f \circ h_{\Omega, \frac{1}{k}}$ est alors une isométrie (conservation des distances) telle que $g \circ h_{\Omega,k} = f$.
On remarque au passage que que g fixe Ω.

Le caractère commutatif de cette décomposition résulte des expressions complexes : on a $h : M(z) \longmapsto M(k(z - \omega) + \omega)$ et $g : M(z) \longmapsto M(a(z - \omega) + \omega)$ ou bien $g : M(z) \longmapsto M(a(\bar{z} - \bar{\omega}) + \omega)$ et on vérifie donc que $h \circ g = g \circ h$.