UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre et Géométrie 1

Feuille d'exercices de géométrie n°2

Homothéties - Similitudes

Révisions

1) Donner la définition et les principales propriétés d'une homothétie. Montrer qu'une homothétie est une application affine.

2) Rappeler ce qu'est la composée de deux homothéties.

Exercice n°1

Montrer que l'ensemble des homothéties-translations planes (on parle aussi de ***dilatations***) est l'ensemble des bijections du plan transformant une droite en une droite parallèle.

Exercice n°2

Montrer qu'une application f du plan $\mathscr{P}$ dans lui même est une dilatation si et seulement si

$$\exists k \in \mathbb{R}^* \quad \forall (M,N) \in \mathscr{P}^2 \quad \overrightarrow{f(M)f(N)} = k\overrightarrow{MN}$$

En déduire que l'ensemble des dilatations est un groupe pour la composition des applications.

Exercice n°3

Soit ABC un triangle. Construire un carré inscrit dans ce triangle.

Exercice n°4

Dans le plan, étant donnés deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sécantes en A et un point I n'appartenant ni à $\mathscr{D}$ ni à $\mathscr{D}'$, construire si possible un cercle passant par I et tangent à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

Exercice n°5

1) Soit f une application non constante du plan affine euclidien $\mathscr{P}$ dans lui même.
Montrer que f conserve le rapport des longueurs si et seulement si :

$$\exists k > 0, \forall (A,B) \in \mathscr{P}^2, \left\|\overrightarrow{f(A)f(B)}\right\| = k\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$$

On dira alors que f est une *similitude de rapport* k.

2) Que peut-on dire d'une similitude qui fixe deux points distincts ?

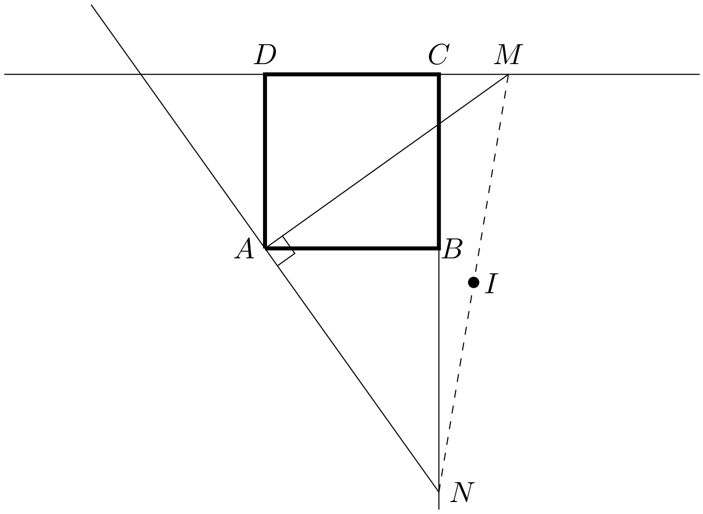
3) Montrer que les similitudes du plan sont les composées d'une isométrie et d'une homothétie.

4) Montrer que l'ensemble des similitudes du plan est un groupe pour la composition des applications.

5) Soit $f : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$. Montrer que f est une similitude directe (respect. indirecte) si et seulement si son expression complexe est de la forme $\varphi(z) = az + b$ (resp. $\varphi(z) = a\bar{z} + b$) avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. ($\varphi(z)$ désignant l'affixe de l'image par f du point d'affixe le nombre complexe z.)

6) Démontrer que toute similitude du plan de rapport $k \neq 1$ admet un unique point fixe Ω et s'écrit de manière unique sous la forme $f = h_{\Omega,k} \circ g$ où g est une isométrie commutant avec l'homothétie $h_{\Omega,k}$.

Exercice n°6



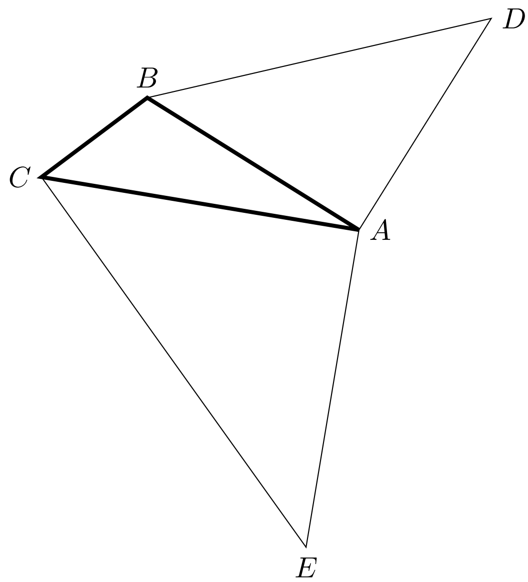
$ABCD$ est un carré direct du plan orienté. M est un point de (DC). La perpendiculaire à (AM) passant par A coupe (BC) en N et I est le milieu de $[MN]$.

1) Montrer que le triangle rectangle AMN est isocèle.

2) Montrer que I est l'image de M par une similitude fixe.

3) Quel est l'ensemble décrit par le point I lorsque M décrit (DC) ?

Exercice n°7



Le plan est orienté. Soient A, B et C trois points non alignés tels que ABC est un triangle direct. On désigne respectivement par D et E les points tels que les triangles ACE et ADB sont directs, rectangles et isocèles en A. Le point O est le milieu de $[BC]$.

1) Construire le point F, symétrique du point C par rapport à A.

2) En utilisant une rotation de centre A et une homothétie de centre C, montrer que les droites (AO) et (DE) sont perpendiculaires et que $DE = 2AO$.

Exercice n°8 *(Épreuve sur dossier 2006)*

On considère deux droites parallèles $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ et un point A n'appartenant ni à $\mathscr{D}$ ni à $\mathscr{D}'$. Le but de l'exercice est de construire un triangle ABC rectangle isocèle en B tel que le point B appartienne à la droite $\mathscr{D}$ et que le point C appartienne à la droite $\mathscr{D}'$.

1) Si une telle construction est réalisable, déterminer les similitudes directes de centre A qui transforment B en C. Résoudre alors le problème posé. Combien y a-t-il de solutions ?

2) Reprendre l'exercice en supposant les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sécantes.

Exercice n°9

On considère dans le plan trois droites parallèles et distinctes (D_1), (D_2) et (D_3). Une droite (Δ) coupe (D_1), (D_2) et (D_3) respectivement en A, B et C. Soit N un point de (D_2) distinct de B. La parallèle à (NC) passant par B coupe (D_1) en M. La parallèle à (NA) passant par B coupe (D_3) en P.

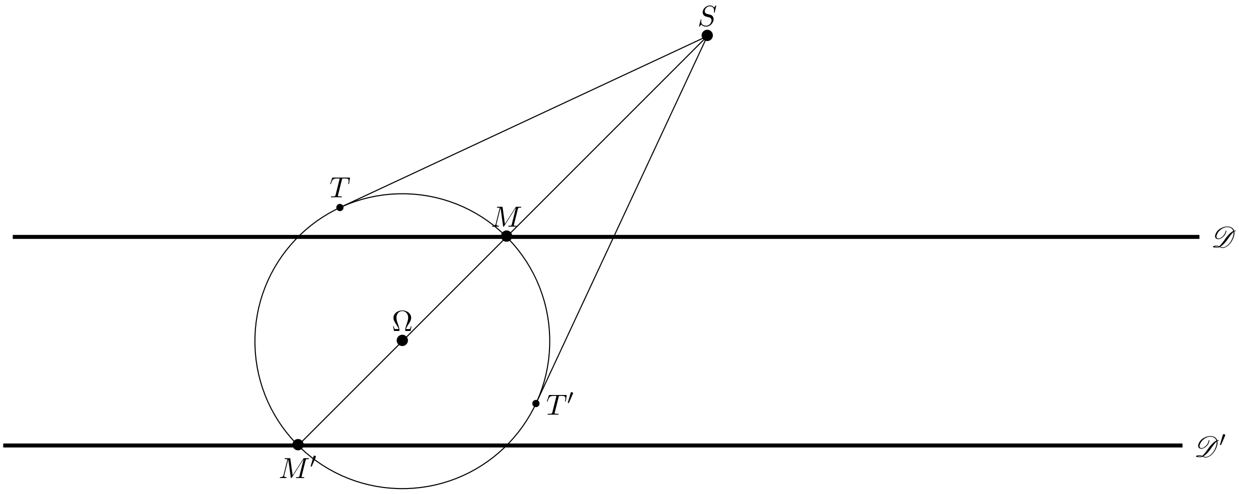
1) Soit h l'homothétie de centre A qui transforme B en C. Construire les points M' et N' images respectives de M et N par l'homothétie h.

2) En déduire les images de M et N par la transformation $f = t_{\overrightarrow{NB}} \circ h$

3) Montrer que les points M, N et P sont alignés.

$\boxed{\textbf{Exercice n°10}}$

Sur la figure ci-dessous, S est un point fixe, extérieur à la bande délimitée par les deux droites parallèles fixes $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.
Une sécante variable passant par S coupe $\mathscr{D}$ en M et $\mathscr{D}'$ en M'. On note Ω le milieu du segment $[MM']$.
Le but de l'exercice est de déterminer l'ensemble des points de contacts T et T' des tangentes passant par S au cercle de diamètre $[MM']$.



1) Construire la figure dans le cas particulier où la sécante est perpendiculaire à $\mathscr{D}$ (et donc à $\mathscr{D}'$).
On note alors M_0, M'_0, T_0, T'_0 et Ω_0 les points correspondants.

2) Rappeler pourquoi il existe une unique similitude directe de centre S qui transforme Ω_0 en Ω.
Démontrer que cette similitude transforme M_0 en M et T_0 en T.

3) Soit de même s_0 la similitude directe de centre S qui transforme Ω_0 en T_0. Démontrer que $s_0(\Omega) = T$.
(On pourra utiliser la relation de Chasles sur les angles et démontrer une égalité de rapports de distances, en s'aidant de la question précédente.)

4) Conclure.