

Algèbre et Géométrie 1

Feuille d'exercices de géométrie n°1

Isométries du plan affine euclidien

Révisions n°1

- 1) Rappeler la définition d'un espace affine $\mathcal{E}$. Faire le lien avec l'enseignement des vecteurs dans le secondaire.
- 2) Comment définir une droite (affine) de $\mathcal{E}$? Démontrer que par deux points distincts A et B de $\mathcal{E}$ il passe une unique droite affine, notée (AB) .
- 3) Donner la définition d'une translation du plan (affine). Quelles en sont les propriétés?
- 4) Quand un espace affine $\mathcal{E}$ est-il dit euclidien?
- 5) Rappeler la définition d'une isométrie de $\mathcal{E}$. Donner des exemples simples.

Exercice n°1 (CAPES 2023 - Première composition)

On se place dans un plan vectoriel P muni d'un produit scalaire noté $(\cdot | \cdot)$ et d'une norme associée notée $\|\cdot\|$. Soient x et y dans P tels que $\|x\| = \|y\|$. Montrer que les vecteurs $x + y$ et $x - y$ sont orthogonaux.

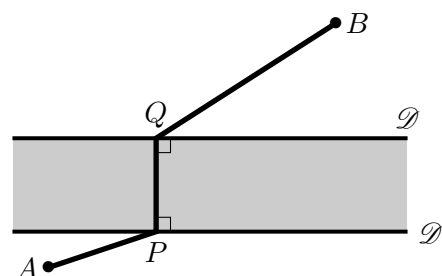
Exercice n°2 (Mayotte 2025 - Deuxième composition)

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs d'un espace vectoriel euclidien. Montrer que si $\vec{u} \perp (\vec{v} - \vec{w})$ et $\vec{v} \perp (\vec{u} - \vec{w})$ alors $\vec{w} \perp (\vec{u} - \vec{v})$.

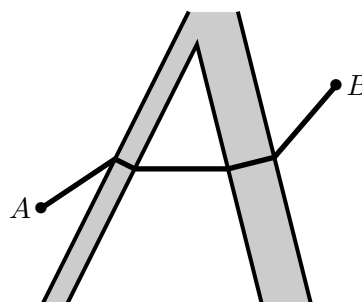
Exercice n°3

- 1) Dans la configuration ci-contre, A et B sont deux points fixes et P et Q sont variables respectivement sur les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ((PQ) restant orthogonale aux deux droites parallèles $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$).

Où placer le pont $[PQ]$ pour que le trajet de A à B soit le plus court possible?



- 2) De même, dans la configuration ci-contre, où doit-on construire les deux ponts (perpendiculairement aux berges de chaque rivière) pour relier les points A et B par le trajet de longueur minimale?



Exercice n°4 (Isométries du plan affine euclidien)

Soient $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien et f une isométrie de $\mathcal{P}$. On rappelle que, par définition, une rotation est une composée de deux réflexions dont les axes sont soit confondus, soit sécants en un point.

- 1) Montrer que s'il existe trois points A , B et C *non alignés* fixés par f (i.e. $f(A) = A$, $f(B) = B$ et $f(C) = C$), alors f est l'identité.
- 2) Montrer que si f fixe deux points distincts A et B alors f est soit l'identité soit la réflexion d'axe (AB) .
- 3) Soit A un point de $\mathcal{P}$. Montrer que l'ensemble des isométries qui laissent A invariant est réunion de l'ensemble des réflexions dont l'axe passe par A et des rotations qui laissent A invariant.
- 4) Montrer que toute isométrie du plan est composée d'au plus trois réflexions.
- 5) Montrer que l'ensemble $Is(\mathcal{P})$ des isométries de $\mathcal{P}$ est un groupe et que pour tout point O de $\mathcal{P}$, l'ensemble $Is_o(\mathcal{P})$ des isométries de $\mathcal{P}$ fixant O est un sous-groupe de $Is(\mathcal{P})$.

Exercice n°5

- 1) Montrer que la composée de deux réflexions par rapport à des droites parallèles est une translation.
- 2) Montrer que toute translation $t_{\vec{u}}$ peut s'écrire comme composée $s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}_1}$ de deux réflexions d'axes parallèles ($\mathcal{D}_1$ étant choisie arbitrairement mais orthogonale à $\vec{u}$ et $\mathcal{D}_2$ étant alors $\mathcal{D}_2 = t_{\frac{1}{2}\vec{u}}(\mathcal{D}_1)$).

Exercice n°6

- 1) Montrer que toute rotation de centre A et d'angle θ peut se décomposer sous la forme $r_{A,\theta} = s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}_1}$ où $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont deux droites sécantes en A , l'une d'entre-elles pouvant être choisie arbitrairement (passant par A).
- 2) (CAPES 2019 - Première composition) Donner une construction à la règle et au compas du centre de la rotation $r_1 \circ r_2$ lorsque r_1 est la rotation de centre d'affixe i et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r_2 est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
- 3) Montrer que l'ensemble des rotations du plan fixant le point A est un groupe pour la composition.
- 4) Que peut-on dire de la composée de deux rotations du plan ? Cette composée est-elle commutative ?

Exercice n°7

Montrer que la composée d'une réflexion d'axe $\mathcal{D}$ et d'une translation de vecteur $\vec{u}$ est une réflexion d'axe parallèle à $\mathcal{D}$ si $\vec{u} \perp \vec{\mathcal{D}}$ et une symétrie glissée sinon.

Exercice n°8

Donner le catalogue complet des différents types d'isométries du plan affine euclidien (justifier).

Exercice n°9 (CAPES 2024 - Première composition)

Dans un plan affine euclidien, on considère un triangle ABC sur lequel sont construits extérieurement les triangles équilatéraux ABD et ACE .

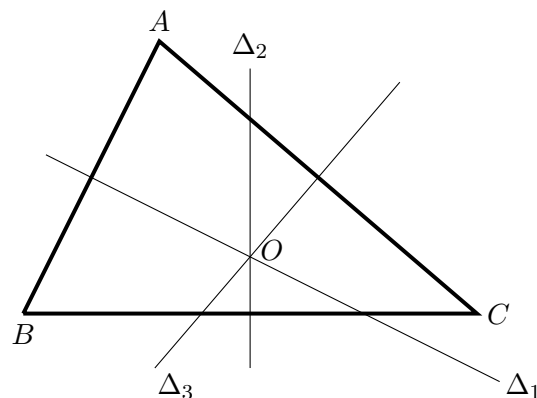
Vrai ou Faux : on a $BE = DC$.

Exercice n°10

1) Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle quelconque du plan et O est le centre du cercle circonscrit à ABC . Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 sont les médiatrices respectives des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on note s_i la réflexion d'axe Δ_i .

Déterminer la nature exacte de la transformation $s_3 \circ s_2 \circ s_1$.

2) Trois droites concourantes Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 étant données, expliquer comment construire un triangle ABC dont Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 sont les médiatrices.



Exercice n°11

Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle rectangle en A du plan affine euclidien orienté. M est un point de (BC) et P et Q sont les symétriques respectifs de M par rapport aux droites (AB) et (AC) .

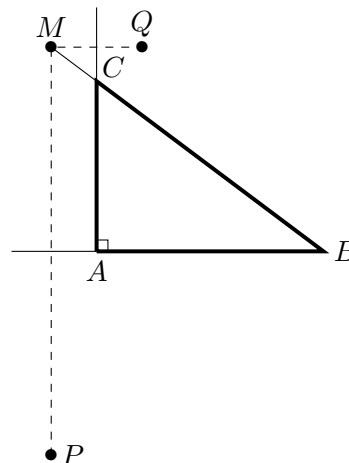
On note s_1 la réflexion d'axe (AB) et s_2 la réflexion d'axe (AC) .

1) Rappeler les différents types d'isométries du plan.

2) Quelle est la nature de l'application $f = s_2 \circ s_1$?

3) En déduire que A est le milieu de $[PQ]$.

4) Montrer que $(BP) \parallel (CQ)$.



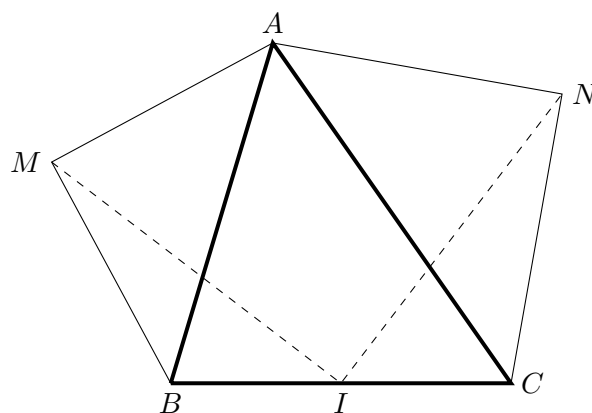
Exercice n°12

Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle quelconque du plan orienté. On a construit les triangles directs AMB et NAC rectangles isocèles. On note I le milieu de $[BC]$. Soit $f = r_{N, \frac{\pi}{2}} \circ r_{M, \frac{\pi}{2}}$ où $r_{\Omega, \alpha}$ désigne la rotation de centre Ω et d'angle de mesure α .

a) Déterminer $f(B)$. Préciser alors la nature exacte de la transformation f .

b) Rappeler pourquoi on peut trouver deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ telles que $r_{N, \frac{\pi}{2}} = s_{\mathcal{D}} \circ s_{(MN)}$ et $r_{M, \frac{\pi}{2}} = s_{(MN)} \circ s_{\mathcal{D}'}$. Par quel(s) point(s) passe(nt) nécessairement $\mathcal{D}$? $\mathcal{D}'$?

c) Montrer que le triangle MIN est rectangle en I et isocèle.



Exercice n°13

1) Rappeler les différents types d'isométries du plan.

2) Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle rectangle isocèle en B du plan affine euclidien orienté.

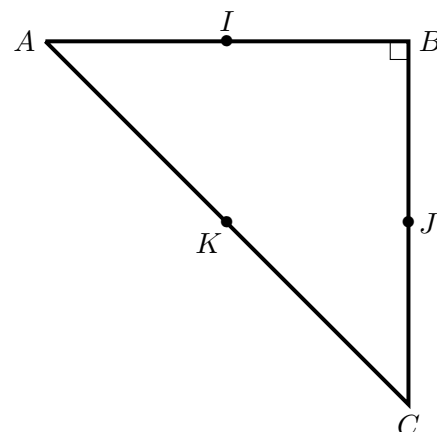
I , J et K désignent les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$ et on a $(\widehat{BA}, \widehat{BC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

On note s la réflexion d'axe (IK) et r la rotation de centre A et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{2}$.

On pose enfin $f = s \circ r$.

a) Déterminer $f \circ f(A)$.

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'isométrie f .



Révisions n°2

- 1) Donner la définition et les principales propriétés d'une homothétie. Montrer qu'une homothétie est une application affine.
- 2) Qu'obtient-on en composant deux homothéties ?

Exercice n°14

Montrer que l'ensemble des homothéties-translations planes (on parle aussi de *dilatations*) est l'ensemble des bijections du plan transformant une droite en une droite parallèle.

Exercice n°15

Montrer qu'une application f du plan $\mathcal{P}$ dans lui même est une dilatation si et seulement si

$$\exists k \in \mathbb{R}^* \quad \forall (M, N) \in \mathcal{P}^2 \quad \overrightarrow{f(M)f(N)} = k \overrightarrow{MN}$$

En déduire que l'ensemble des dilatations est un groupe pour la composition des applications.

Exercice n°16

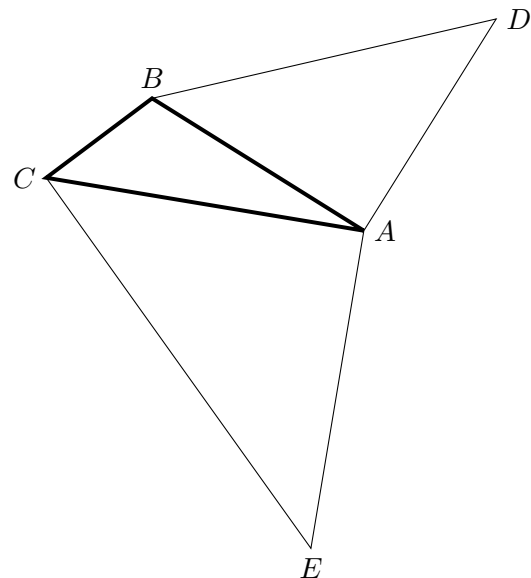
Soit ABC un triangle. Construire, si possible, un carré inscrit dans ce triangle.

Exercice n°17

Dans le plan, étant donnés deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sécantes en A et un point I n'appartenant ni à $\mathcal{D}$ ni à $\mathcal{D}'$, construire, si possible, un cercle passant par I et tangent à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

Exercice n°18

Le plan est orienté. Soient A , B et C trois points non alignés tels que ABC est un triangle direct. On désigne respectivement par D et E les points tels que les triangles ACE et ADB sont directs, rectangles et isocèles en A . Le point O est le milieu de $[BC]$.



- 1) Construire le point F , symétrique du point C par rapport à A .
- 2) En utilisant une rotation de centre A et une homothétie de centre C , montrer que les droites (AO) et (DE) sont perpendiculaires et que $DE = 2AO$.

Exercice n°19

On considère dans le plan trois droites parallèles et distinctes (D_1) , (D_2) et (D_3) . Une droite (Δ) coupe (D_1) , (D_2) et (D_3) respectivement en A , B et C . Soit N un point de (D_2) distinct de B . La parallèle à (NC) passant par B coupe (D_1) en M . La parallèle à (NA) passant par B coupe (D_3) en P .

- 1) Soit h l'homothétie de centre A qui transforme B en C . Construire les points M' et N' images respectives de M et N par l'homothétie h .
- 2) En déduire les images de M et N par la transformation $f = t_{\overrightarrow{NB}} \circ h$
- 3) Montrer que les points M , N et P sont alignés.