

## Algèbre et Géométrie 1

### Feuille d'exercices de géométrie n°1

### *Isométries du plan affine euclidien*

#### Révisions

- 1) Rappeler la définition d'un espace affine  $\mathcal{E}$ .
- 2) Comment définir une droite (affine) de  $\mathcal{E}$ ? Démontrer que par deux points distincts  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{E}$  il passe une unique droite affine, notée  $(AB)$ .
- 3) Quand un espace affine  $\mathcal{E}$  est-il dit euclidien?
- 4) Rappeler la définition d'une isométrie de  $\mathcal{E}$ . Donner des exemples simples.

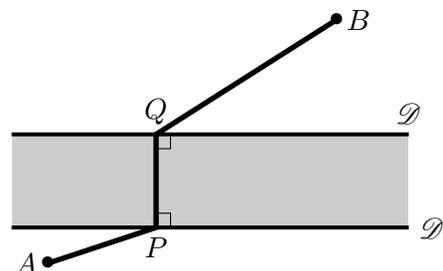
#### Exercice n°1 (CAPES 2023 - Première composition)

On se place dans un plan vectoriel  $P$  muni d'un produit scalaire noté  $(\cdot | \cdot)$  et d'une norme associée notée  $\|\cdot\|$ . Soient  $x$  et  $y$  dans  $P$  tels que  $\|x\| = \|y\|$ .  
 Montrer que les vecteurs  $x + y$  et  $x - y$  sont orthogonaux.

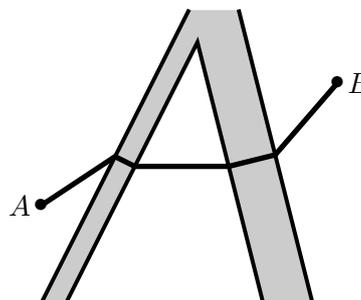
#### Exercice n°2

- 1) Dans la configuration ci-contre,  $A$  et  $B$  sont deux points fixes et  $P$  et  $Q$  sont variables respectivement sur les droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  ( $(PQ)$  restant orthogonale aux deux droites parallèles  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$ ).

Où placer le pont  $[PQ]$  pour que le trajet de  $A$  à  $B$  soit le plus court possible?



- 2) De même, dans la configuration ci-contre, où doit-on construire les deux ponts (perpendiculairement aux berges de chaque rivière) pour relier les points  $A$  et  $B$  par le trajet de longueur minimale?



#### Exercice n°3 (Isométries du plan affine euclidien)

Soient  $\mathcal{P}$  un plan affine euclidien et  $f$  une isométrie de  $\mathcal{P}$ . On rappelle que, par définition, une rotation est une composée de deux réflexions dont les axes sont soit confondus, soit sécants en un point.

- 1) Montrer que s'il existe trois points  $A$ ,  $B$  et  $C$  non alignés fixés par  $f$  (i.e.  $f(A) = A$ ,  $f(B) = B$  et  $f(C) = C$ ), alors  $f$  est l'identité.
- 2) Montrer que si  $f$  fixe deux points distincts  $A$  et  $B$  alors  $f$  est soit l'identité soit la réflexion d'axe  $(AB)$ .

- 3) Soit  $A$  un point de  $\mathcal{P}$ . Montrer que l'ensemble des isométries qui laissent  $A$  invariant est réunion de l'ensemble des réflexions dont l'axe passe par  $A$  et des rotations qui laissent  $A$  invariant.
- 4) Montrer que toute isométrie du plan est composée d'au plus trois réflexions.
- 5) Montrer que l'ensemble  $Is(\mathcal{P})$  des isométries de  $\mathcal{P}$  est un groupe et que pour tout point  $O$  de  $\mathcal{P}$ , l'ensemble  $Is_o(\mathcal{P})$  des isométries de  $\mathcal{P}$  fixant  $O$  est un sous-groupe de  $Is(\mathcal{P})$ .

#### Exercice n°4

- 1) Montrer que la composée de deux réflexions par rapport à des droites parallèles est une translation.
- 2) Montrer que toute translation  $t_{\vec{u}}$  peut s'écrire comme composée  $s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}_1}$  de deux réflexions d'axes parallèles ( $\mathcal{D}_1$  étant choisie arbitrairement mais orthogonale à  $\vec{u}$  et  $\mathcal{D}_2$  étant alors  $\mathcal{D}_2 = t_{\frac{1}{2}\vec{u}}(\mathcal{D}_1)$ ).

#### Exercice n°5

- 1) Montrer que toute rotation de centre  $A$  et d'angle  $\theta$  peut se décomposer sous la forme  $r_{A,\theta} = s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}_1}$  où  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  sont deux droites sécantes en  $A$ , l'une d'entre-elles pouvant être choisie arbitrairement (passant par  $A$ ).
- 2) (CAPES 2019 - Première composition) Donner une construction à la règle et au compas du centre de la rotation  $r_1 \circ r_2$  lorsque  $r_1$  est la rotation de centre d'affixe  $i$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$  et  $r_2$  est la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ .
- 3) Montrer que l'ensemble des rotations du plan fixant le point  $A$  est un groupe pour la composition.
- 4) Que peut-on dire de la composée de deux rotations du plan ? Cette composée est-elle commutative ?

#### Exercice n°6

Montrer que la composée d'une réflexion d'axe  $\mathcal{D}$  et d'une translation de vecteur  $\vec{u}$  est une réflexion d'axe parallèle à  $\mathcal{D}$  si  $\vec{u} \perp \vec{\mathcal{D}}$  et une symétrie glissée sinon.

#### Exercice n°7

Donner le catalogue complet des différents types d'isométries du plan affine euclidien (justifier).

#### Exercice n°8 (CAPES 2024 - Première composition)

Dans un plan affine euclidien, on considère un triangle  $ABC$  sur lequel sont construits extérieurement les triangles équilatéraux  $ABD$  et  $ACE$ .

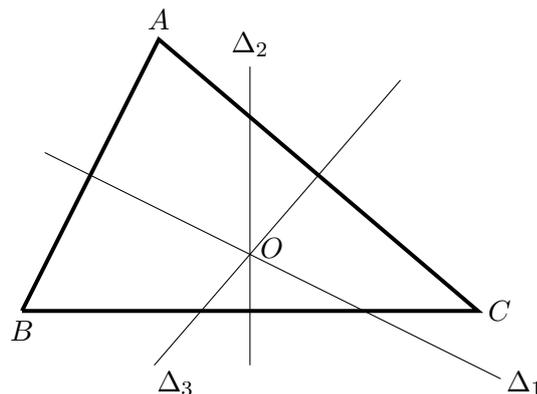
Vrai ou Faux : on a  $BE = DC$ .

#### Exercice n°9

1) Sur la figure ci-contre,  $ABC$  est un triangle quelconque du plan et  $O$  est le centre du cercle circonscrit à  $ABC$ .  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ ,  $\Delta_3$  sont les médiatrices respectives des segments  $[AB]$ ,  $[BC]$  et  $[CA]$ . Pour  $i \in \{1, 2, 3\}$ , on note  $s_i$  la réflexion d'axe  $\Delta_i$ .

Déterminer la nature exacte de la transformation  $s_3 \circ s_2 \circ s_1$ .

2) Trois droites concourantes  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ ,  $\Delta_3$  étant données, expliquer comment construire un triangle  $ABC$  dont  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ ,  $\Delta_3$  sont les médiatrices.

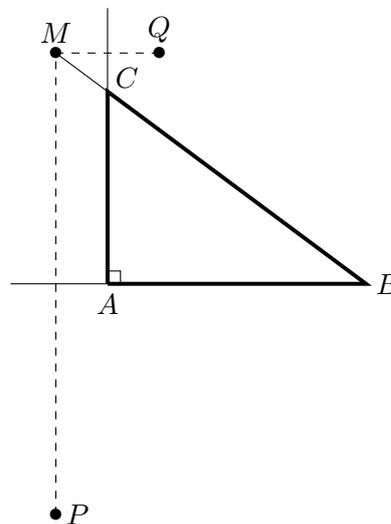


### Exercice n°10

Sur la figure ci-contre,  $ABC$  est un triangle rectangle en  $A$  du plan affine euclidien orienté.  $M$  est un point de  $(BC)$  et  $P$  et  $Q$  sont les symétriques respectifs de  $M$  par rapport aux droites  $(AB)$  et  $(AC)$ .

On note  $s_1$  la réflexion d'axe  $(AB)$  et  $s_2$  la réflexion d'axe  $(AC)$ .

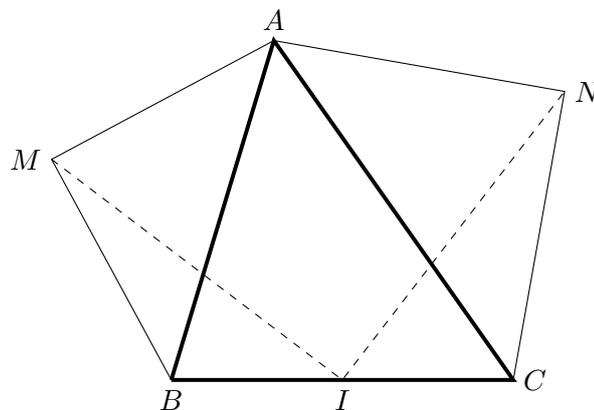
- 1) Rappeler les différents types d'isométries du plan.
- 2) Quelle est la nature de l'application  $f = s_2 \circ s_1$  ?
- 3) En déduire que  $A$  est le milieu de  $[PQ]$ .
- 4) Montrer que  $(BP) \parallel (CQ)$ .



### Exercice n°11

Sur la figure ci-contre,  $ABC$  est un triangle quelconque du plan orienté. On a construit les triangles directs  $AMB$  et  $NAC$  rectangles isocèles. On note  $I$  le milieu de  $[BC]$ . Soit  $f = r_{N, \frac{\pi}{2}} \circ r_{M, \frac{\pi}{2}}$  où  $r_{\Omega, \alpha}$  désigne la rotation de centre  $\Omega$  et d'angle de mesure  $\alpha$ .

- a) Déterminer  $f(B)$ . Préciser alors la nature exacte de la transformation  $f$ .
- b) Rappeler pourquoi on peut trouver deux droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  telles que  $r_{N, \frac{\pi}{2}} = s_{\mathcal{D}} \circ s_{(MN)}$  et  $r_{M, \frac{\pi}{2}} = s_{(MN)} \circ s_{\mathcal{D}'}$ . Par quel(s) point(s) passe(nt) nécessairement  $\mathcal{D}$  ?  $\mathcal{D}'$  ?
- c) Montrer que le triangle  $MIN$  est rectangle en  $I$  et isocèle.



### Exercice n°12

1) Rappeler les différents types d'isométries du plan.

2) Sur la figure ci-contre,  $ABC$  est un triangle rectangle isocèle en  $B$  du plan affine euclidien orienté.

$I, J$  et  $K$  désignent les milieux respectifs de  $[AB]$ ,  $[BC]$  et  $[AC]$  et on a  $\widehat{(\vec{BA}, \vec{BC})} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ .

On note  $s$  la réflexion d'axe  $(IK)$  et  $r$  la rotation de centre  $A$  et d'angle de mesure  $-\frac{\pi}{2}$ .

On pose enfin  $f = s \circ r$ .

- a) Déterminer  $f \circ f(A)$ .
- b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'isométrie  $f$ .

