

Algèbre et Géométrie 1

Feuille d'exercices de géométrie n°1

Isométries du plan affine euclidien

Révisions

- 1) Rappeler la définition d'un espace affine \mathcal{E} .
- 2) Comment définir une droite (affine) de \mathcal{E} ? Démontrer que par deux points distincts A et B de \mathcal{E} il passe une unique droite affine, notée (AB) .
- 3) Quand un espace affine \mathcal{E} est-il dit euclidien?
- 4) Rappeler la définition d'une isométrie de \mathcal{E} . Donner des exemples simples.

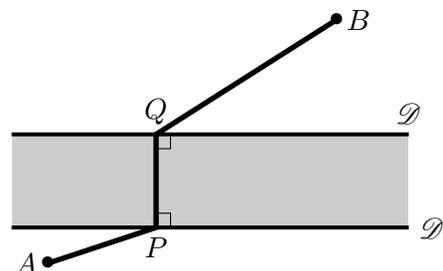
Exercice n°1 (CAPES 2023 - Première composition)

On se place dans un plan vectoriel P muni d'un produit scalaire noté $(\cdot | \cdot)$ et d'une norme associée notée $\|\cdot\|$. Soient x et y dans P tels que $\|x\| = \|y\|$. Montrer que les vecteurs $x + y$ et $x - y$ sont orthogonaux.

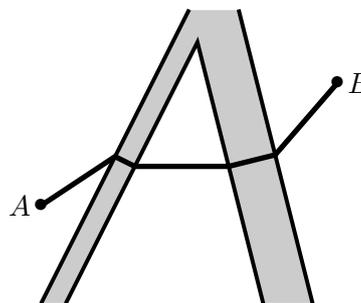
Exercice n°2

- 1) Dans la configuration ci-contre, A et B sont deux points fixes et P et Q sont variables respectivement sur les droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' ((PQ) restant orthogonale aux deux droites parallèles \mathcal{D} et \mathcal{D}').

Où placer le pont $[PQ]$ pour que le trajet de A à B soit le plus court possible?



- 2) De même, dans la configuration ci-contre, où doit-on construire les deux ponts (perpendiculairement aux berges de chaque rivière) pour relier les points A et B par le trajet de longueur minimale?



Exercice n°3 (Isométries du plan affine euclidien)

Soient \mathcal{P} un plan affine euclidien et f une isométrie de \mathcal{P} . On rappelle que, par définition, une rotation est une composée de deux réflexions dont les axes sont soit confondus, soit sécants en un point.

- 1) Montrer que s'il existe trois points A , B et C non alignés fixés par f (i.e. $f(A) = A$, $f(B) = B$ et $f(C) = C$), alors f est l'identité.
- 2) Montrer que si f fixe deux points distincts A et B alors f est soit l'identité soit la réflexion d'axe (AB) .

- 3) Soit A un point de \mathcal{P} . Montrer que l'ensemble des isométries qui laissent A invariant est réunion de l'ensemble des réflexions dont l'axe passe par A et des rotations qui laissent A invariant.
- 4) Montrer que toute isométrie du plan est composée d'au plus trois réflexions.
- 5) Montrer que l'ensemble $Is(\mathcal{P})$ des isométries de \mathcal{P} est un groupe et que pour tout point O de \mathcal{P} , l'ensemble $Is_o(\mathcal{P})$ des isométries de \mathcal{P} fixant O est un sous-groupe de $Is(\mathcal{P})$.

Exercice n°4

- 1) Montrer que la composée de deux réflexions par rapport à des droites parallèles est une translation.
- 2) Montrer que toute translation $t_{\vec{u}}$ peut s'écrire comme composée $s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}_1}$ de deux réflexions d'axes parallèles (\mathcal{D}_1 étant choisie arbitrairement mais orthogonale à \vec{u} et \mathcal{D}_2 étant alors $\mathcal{D}_2 = t_{\frac{1}{2}\vec{u}}(\mathcal{D}_1)$).

Exercice n°5

- 1) Montrer que toute rotation de centre A et d'angle θ peut se décomposer sous la forme $r_{A,\theta} = s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}_1}$ où \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont deux droites sécantes en A , l'une d'entre-elles pouvant être choisie arbitrairement (passant par A).
- 2) (CAPES 2019 - Première composition) Donner une construction à la règle et au compas du centre de la rotation $r_1 \circ r_2$ lorsque r_1 est la rotation de centre d'affixe i et d'angle π et r_2 est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
- 3) Montrer que l'ensemble des rotations du plan fixant le point A est un groupe pour la composition.
- 4) Que peut-on dire de la composée de deux rotations du plan ? Cette composée est-elle commutative ?

Exercice n°6

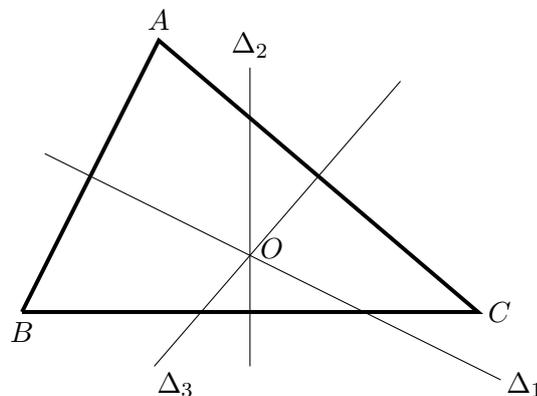
Montrer que la composée d'une réflexion d'axe \mathcal{D} et d'une translation de vecteur \vec{u} est une réflexion d'axe parallèle à \mathcal{D} si $\vec{u} \perp \mathcal{D}$ et une symétrie glissée sinon.

Exercice n°7

Donner le catalogue complet des différents types d'isométries du plan affine euclidien (justifier).

Exercice n°8

- 1) Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle quelconque du plan et O est le centre du cercle circonscrit à ABC . Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 sont les médiatrices respectives des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on note s_i la réflexion d'axe Δ_i . Déterminer la nature exacte de la transformation $s_3 \circ s_2 \circ s_1$.
- 2) Trois droites concourantes Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 étant données, expliquer comment construire un triangle ABC dont Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 sont les médiatrices.

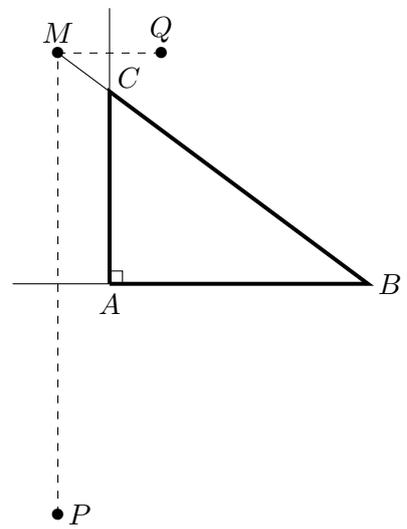


Exercice n°9

Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle rectangle en A du plan affine euclidien orienté. M est un point de (BC) et P et Q sont les symétriques respectifs de M par rapport aux droites (AB) et (AC) .

On note s_1 la réflexion d'axe (AB) et s_2 la réflexion d'axe (AC) .

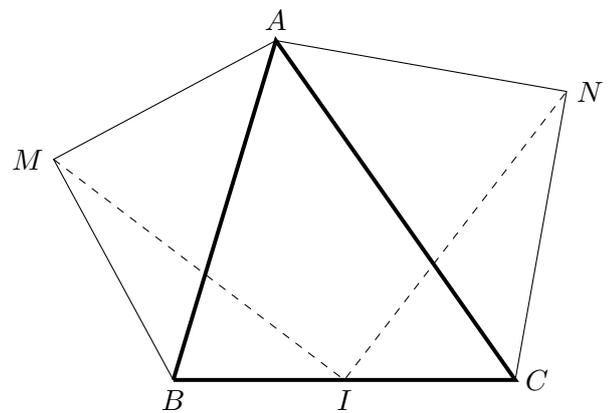
- 1) Rappeler les différents types d'isométries du plan.
- 2) Quelle est la nature de l'application $f = s_2 \circ s_1$?
- 3) En déduire que A est le milieu de $[PQ]$.
- 4) Montrer que $(BP) \parallel (CQ)$.



Exercice n°10

Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle quelconque du plan orienté. On a construit les triangles directs AMB et NAC rectangles isocèles. On note I le milieu de $[BC]$. Soit $f = r_{N, \frac{\pi}{2}} \circ r_{M, \frac{\pi}{2}}$ où $r_{\Omega, \alpha}$ désigne la rotation de centre Ω et d'angle de mesure α .

- a) Déterminer $f(B)$. Préciser alors la nature exacte de la transformation f .
- b) Rappeler pourquoi on peut trouver deux droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' telles que $r_{N, \frac{\pi}{2}} = s_{\mathcal{D}} \circ s_{(MN)}$ et $r_{M, \frac{\pi}{2}} = s_{(MN)} \circ s_{\mathcal{D}'}$. Par quel(s) point(s) passe(nt) nécessairement \mathcal{D} ? \mathcal{D}' ?
- c) Montrer que le triangle MIN est rectangle en I et isocèle.



Exercice n°11

- 1) Rappeler les différents types d'isométries du plan.
- 2) Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle rectangle isocèle en B du plan affine euclidien orienté.

I, J et K désignent les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$ et on a $\widehat{(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

On note s la réflexion d'axe (IK) et r la rotation de centre A et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{2}$.

On pose enfin $f = s \circ r$.

- a) Déterminer $f \circ f(A)$.
- b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'isométrie f .

