UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre et Géométrie 1

Feuille d'exercices de géométrie n°1

Isométries du plan affine euclidien

Révisions

1) Rappeler la définition d'un espace affine $\mathscr{E}$.

2) Comment définir une droite (affine) de $\mathscr{E}$? Démontrer que par deux points distincts A et B de $\mathscr{E}$ il passe une unique droite affine, notée (AB).

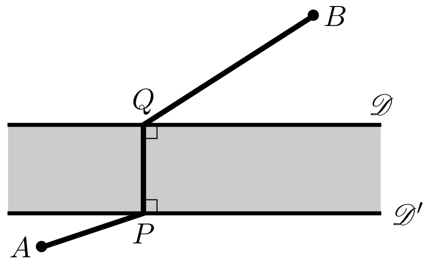
3) Quand un espace affine $\mathscr{E}$ est-il dit euclidien ?

4) Rappeler la définition d'une isométrie de $\mathscr{E}$. Donner des exemples simples.

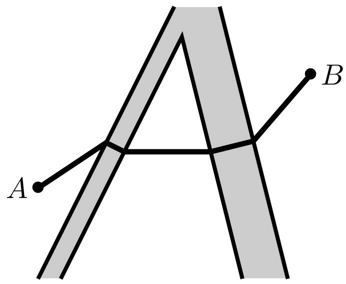
Exercice n°1

1) Dans la configuration ci-contre, A et B sont deux points fixes et P et Q sont variables respectivement sur les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ((PQ) restant orthogonale aux deux droites parallèles $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}$').

Où placer le pont $[PQ]$ pour que le trajet de A à B soit le plus court possible ?



2) De même, dans la configuration ci-contre, où doit-on construire les deux ponts (perpendiculairement aux berges de chaque rivière) pour relier les points A et B par le trajet de longueur minimale ?



Exercice n°2 (Isométries du plan affine euclidien)

Soient $\mathscr{P}$ un plan affine euclidien et f une isométrie de $\mathscr{P}$. On rappelle que, par définition, une rotation est une composée de deux réflexions dont les axes sont soit confondus, soit sécants en un point.

1) Montrer que s'il existe trois points A, B et C *non alignés* fixés par f ($i.e$ $f(A) = A$, $f(B) = B$ et $f(C) = C$), alors f est l'identité.

2) Montrer que si f fixe deux points distincts A et B alors f est soit l'identité soit la réflexion d'axe (AB).

3) Soit A un point de $\mathscr{P}$. Montrer que l'ensemble des isométries qui laissent A invariant est réunion de l'ensemble des réflexions dont l'axe passe par A et des rotations qui laissent A invariant.

4) Montrer que toute isométrie du plan est composée d'au plus trois réflexions.

5) Montrer que l'ensemble $Is(\mathscr{P})$ des isométries de$\mathscr{P}$ est un groupe et que pour tout point O de $\mathscr{P}$, l'ensemble $Is_o(\mathscr{P})$ des isométries de $\mathscr{P}$ fixant O est un sous-groupe de $Is(\mathscr{P})$.

Exercice n°3

1) Montrer que la composée de deux réflexions par rapport à des droites parallèles est une translation.

2) Montrer que toute translation $t_{\overrightarrow{u}}$ peut s'écrire comme composée $s_{\mathscr{D}_2} \circ s_{\mathscr{D}_1}$ de deux réflexions d'axes parallèles ($\mathscr{D}_1$ étant choisie arbitrairement mais orthogonale à $\overrightarrow{u}$ et $\mathscr{D}_2$ étant alors $\mathscr{D}_2 = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{u}}(\mathscr{D}_1)$).

Exercice n°4

1) Montrer que toute rotation de centre A et d'angle θ peut se décomposer sous la forme $r_{A,\theta} = s_{\mathscr{D}_2} \circ s_{\mathscr{D}_1}$ où $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont deux droites sécantes en A, l'une d'entre-elles pouvant être choisie arbitrairement (passant par A).

2) *(CAPES 2019 - Première composition)* Donner une construction à la règle et au compas du centre de la rotation $r_1 \circ r_2$ lorsque r_1 est la rotation de centre d'affixe i et d'angle π et r_2 est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

3) Montrer que l'ensemble des rotations du plan fixant le point A est un groupe pour la composition.

4) Que peut-on dire de la composée de deux rotations du plan ? Cette composée est-elle commutative ?

Exercice n°5

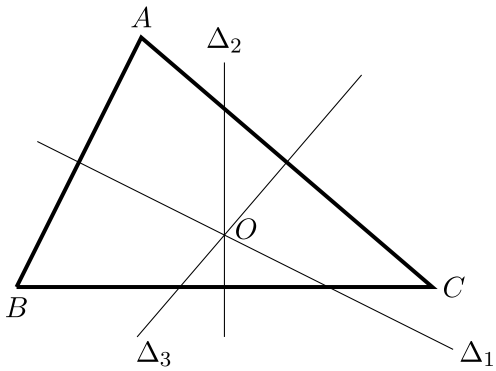
Montrer que la composée d'une réflexion d'axe $\mathscr{D}$ et d'une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ est une réflexion d'axe parallèle à $\mathscr{D}$ si $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{\mathscr{D}}$ et une symétrie glissée sinon.

Exercice n°6

Donner le catalogue complet des différents types d'isométries du plan affine euclidien (justifier).

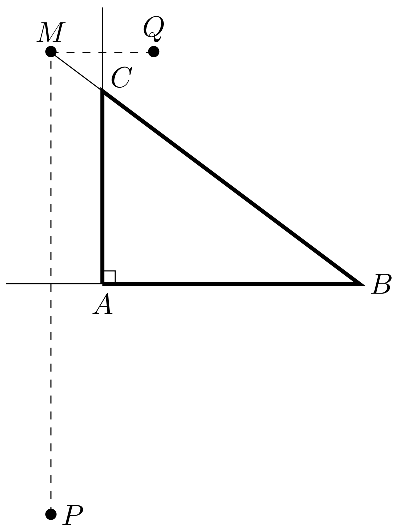
Exercice n°7

1) Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle quelconque du plan et O est le centre du cercle circonscrit à ABC. Δ_1, Δ_2, Δ_3 sont les médiatrices respectives des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on note s_i la réflexion d'axe Δ_i.
Déterminer la nature exacte de la transformation $s_3 \circ s_2 \circ s_1$.
2) Trois droites concourantes Δ_1, Δ_2, Δ_3 étant données, expliquer comment construire un triangle ABC dont Δ_1, Δ_2, Δ_3 sont les médiatrices.



Exercice n°8

Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle rectangle en A du plan affine euclidien orienté. M est un point de (BC) et P et Q sont les symétriques respectifs de M par rapport aux droites (AB) et (AC).
On note s_1 la réflexion d'axe (AB) et s_2 la réflexion d'axe (AC).
1) Rappeler les différents types d'isométries du plan.
2) Quelle est la nature de l'application $f = s_2 \circ s_1$?
3) En déduire que A est le milieu de $[PQ]$.
4) Montrer que $(BP)//(CQ)$.



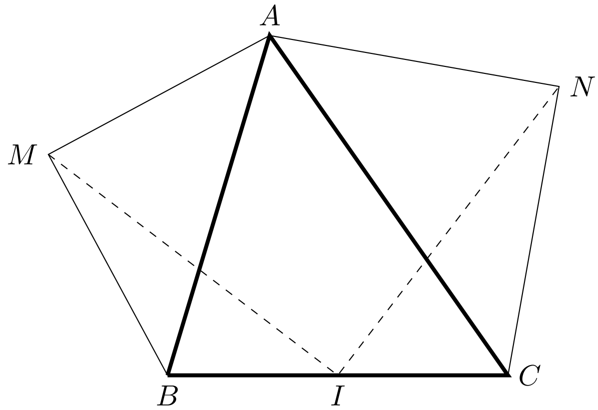
Exercice n°9

Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle quelconque du plan orienté. On a construit les triangles directs AMB et NAC rectangles isocèles. On note I le milieu de $[BC]$. Soit $f = r_{N,\frac{\pi}{2}} \circ r_{M,\frac{\pi}{2}}$ où $r_{\Omega,\alpha}$ désigne la rotation de centre Ω et d'angle de mesure α.

a) Déterminer $f(B)$. Préciser alors la nature exacte de la transformation f.

b) Rappeler pourquoi on peut trouver deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ telles que $r_{N,\frac{\pi}{2}} = s_{\mathscr{D}} \circ s_{(MN)}$ et $r_{M,\frac{\pi}{2}} = s_{(MN)} \circ s_{\mathscr{D}'}$. Par quel(s) point(s) passe(nt) nécessairement $\mathscr{D}$? $\mathscr{D}'$?

c) Montrer que le triangle MIN est rectangle en I et isocèle.



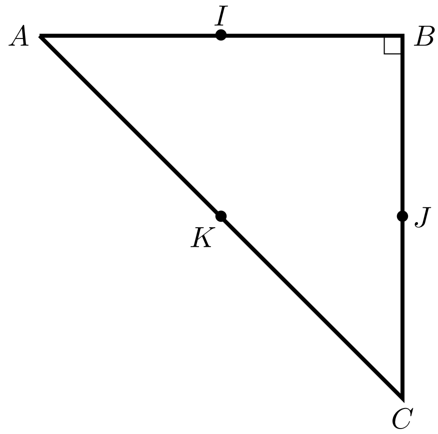
Exercice n°10

1) Rappeler les différents types d'isométries du plan.

2) Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle rectangle isocèle en B du plan affine euclidien orienté.
I, J et K désignent les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$ et on a $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
On note s la réflexion d'axe (IK) et r la rotation de centre A et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{2}$.
On pose enfin $f = s \circ r$.

a) Déterminer $f \circ f(A)$.

b) En déduire la nature **et les éléments caractéristiques** de l'isométrie f.



Exercice n°11 (CAPES 2020 - Première composition)

On note Q l'ensemble $\{A, B, C, D\}$ où A, B, C, D sont les sommets d'un carré du plan.

On se propose de déterminer l'ensemble $I(Q)$ des isométries du plan $\mathscr{P}$ qui conservent globalement l'ensemble Q. Parmi elles, $I^+(Q)$ désigne l'ensemble de celles qui sont directes et $I^-(Q)$ l'ensemble de celles qui sont indirectes. La médiatrice du segment $[BC]$ est notée Δ et s_Δ désigne la réflexion d'axe Δ.

1) Montrer que $I(Q)$ et $I^+(Q)$ munis de la composition des applications sont des groupes. En est-il de même pour $I^-(Q)$?

2) Montrer que l'application

$$F : \left\{ \begin{array}{ccc} I^+(Q) & \longrightarrow & I^-(Q) \\ f & \longmapsto & s_\Delta \circ f \end{array} \right.$$

est bijective.

3) Démontrer que $I^+(Q)$ contient exactement quatre éléments. Donner la liste de ces éléments et la table du groupe $I^+(Q)$.

4) Préciser les caractéristiques géométriques de chacune des isométries de $I(Q)$.