UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algébre et Géométrie 1

Correction succinte des exercices d'algèbre

Matrices - Déterminant

Exercice n°4

1) On trouve $D_1 = 2$, $D_2 = 3$ et $D_3 = 4$.

2) Soit $n \geqslant 3$. En développant D_n par rapport à sa première colonne, on obtient

$$D_n = 2D_{n-1} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & -1 & \cdots \\ \cdots & -1 & \cdots & \\ 0 & & 2 & \end{vmatrix}.$$

En développant le dernier déterminant suivant sa première ligne, on obtient alors la formule annoncée.

3) Une récurrence immédiate montre alors que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad D_n = n + 1$.

Exercice n°5

1) On trouve respectivement $a_2 - a_1$ et $(a_2 - a_3)(a_3 - a_1)(a_1 - a_2)$.

2) **a)** Clair en développant ce polynôme (qui est unitaire et de degré $n - 1$).

b) Par linéarité, $C_n + \lambda_{n-2}C_{n-1} + \cdots + \lambda_0 C_1 = \begin{pmatrix} P(a_1) \\ \vdots \\ P(a_{n-1}) \\ P(a_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ P(a_n) \end{pmatrix}$

c) On ne modifie pas le déterminant d'une matrice si, à l'une de ses colonnes, on ajoute une combinaison linéaire des autres colonnes. Le déterminant de la matrice A est le même que celui de la matrice obtenue en remplaçant sa colonne C_n par $C_n + \lambda_{n-2}C_{n-1} + \cdots + \lambda_0 C_1$.
En développant par rapport aux termes de sa dernière colonne le déterminant de la matrice obtenue, on obtient le résultat.

3) On peut alors conclure par récurrence sur n.

Exercice n°8

Si on pose $A = \Delta(0)$, $\Delta(-x) = \det\,(A - xI)$ est le polynôme caractéristique de A donc est un polynôme en x, unitaire, de degré n. Or, $A + I$ est de rang 1 donc a un noyau de dimension $(n-1)$ et par suite -1 est valeur propre de A de multiplicité au moins $(n-1)$. Comme $\mathrm{Tr}(A) = 0$ est la somme des valeurs propres de A, on a finalement $\Delta(-x) = (-1)^n(x+1)^{n-1}(x-n+1)$ soit $\Delta(x) = (x-1)^{n-1}(x+n-1)$.