UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre et Géométrie 1

Feuille d'exercices d'algèbre n°2

Matrices - Déterminant

Révisions

1) *(CAPES 2015 - Deuxième composition)*
Donner la définition d'une matrice inversible et démontrer l'unicité de son inverse.
Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}(2,\mathbb{R})$. Établir que $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = O_2$ puis démontrer que la matrice A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$.

2) Donner la définition de deux matrices carrées semblables. Interpréter en termes d'endomorphismes.

3) Rappeler la définition et les propriétés du déterminant d'une matrice carrée. Interpréter géométriquement le déterminant de deux vecteurs du plan.
Montrer que le déterminant d'une matrice antisymétrique d'ordre impair est nul.

Exercice n°1

Soit $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ une base d'un espace vectoriel de dimension 2. Les matrices suivantes sont les matrices d'endomorphismes relativement à $\mathscr{B}$.
Dans chacun des cas suivants, caractériser géométriquement cet endomorphisme.
$M_1 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ $M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $M_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $M_4 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ $M_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $M_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Exercice n°2 *(CAPES 2001 - Deuxième composition)*

On considère la matrice réelle : $M = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Calculer M^2 et M^3 et vérifier que M^3 est combinaison linéaire de M et M^2.

2) Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 1 la matrice M^n peut s'écrire sous la forme $M^n = a_n M + b_n M^2$ et calculer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

Exercice n°3

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée nilpotente ; c'est-à-dire : $\exists m \in \mathbb{N} \quad A^{m+1} = 0_n$.
On pose : $e^A = \displaystyle\sum_{p\geqslant 0} \frac{1}{p!} A^p$ avec la convention $A^0 = I_n$ (remarquer que cette somme n'est qu'en apparence infinie, puisque $A^p = 0_n$ pour $p \geqslant m+1$.)

1) Calculer e^{0_n} et e^A où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2) On suppose que A et B sont nilpotentes et **commutent** ; démontrer que $e^{A+B} = e^A e^B$.

3) En déduire que e^A est inversible. Quelle est son inverse ?

Exercice n°4 *(CAPES 2016 - Première composition)*

On fixe un entier $n \geqslant 1$. On considère la matrice A_n à n lignes et n colonnes définie par

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de cette matrice est noté D_n.

1) Calculer D_1, D_2 et D_3.

2) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 3$, $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$.

3) En déduire une expression de D_n.

Exercice n°5 *(CAPES 2016 - Première composition)*

On considère la matrice de Vandermonde $A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$ où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $a_1, \cdots, a_n$ sont des nombres réels.

1) Calculer le déterminant de A lorsque $n = 2$ et $n = 3$.

2) On considère le polynôme $P(X) = (X - a_1) \cdots (X - a_{n-1})$.

a) Montrer qu'il existe des nombres réels $\lambda_0, \cdots, \lambda_{n-2}$ tels que

$$P(X) = X^{n-1} + \lambda_{n-2}X^{n-2} + \cdots + \lambda_1 X + \lambda_0.$$

b) On note $C_1, \cdots, C_n$ les colonnes de A. Montrer que $C_n + \lambda_{n-2}C_{n-1} + \cdots + \lambda_0 C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ P(a_n) \end{pmatrix}$

c) En déduire que $\det(A) = P(a_n) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}$.

d) Montrer que $\det(A) = \displaystyle\prod_{1 \leqslant k < \ell \leqslant n} (a_\ell - a_k)$.

Exercice n°6 *(CAPES 2011 - Deuxième composition)*

Étant donné un entier naturel m non nul, α , α_1 , …, α_m désignent $m+1$ nombres réels. On considère la matrice M de $\mathscr{M}_{m+1}(\mathbb{R})$ définie par : $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha_m \\ \alpha_1 & \cdots & \cdots & \alpha_m & \alpha \end{pmatrix}$

Démontrer par récurrence sur m que $\det(M) = \alpha - \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2$

Exercice n°7

Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on pose $\sigma_i = \displaystyle\sum_{k=1}^{i} k$. Calculer $\det \begin{pmatrix} \sigma_1 & \cdots & \cdots & \sigma_1 \\ \vdots & \sigma_2 & \cdots & \sigma_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \cdots & \sigma_n \end{pmatrix}$.

Exercice n°8

En évitant au maximum les calculs, donner la forme factorisée du déterminant $\Delta(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & x \end{vmatrix}$.

Réduction des endomorphismes

Révisions

1) Quand dit-on qu'un endomorphisme (resp. une matrice) est diagonalisable ? Qu'il est trigonalisable ? Que peut-on dire d'une matrice nilpotente diagonalisable ?

2) Qu'appelle-t-on polynôme annulateur d'un endomorphisme u du $\mathbb{K}$-espace vectoriel (de dimension finie) E ? Qu'est-ce que le polynôme caractéristique de u ?

3) *(CAPES 2014e - Deuxième composition)* Soit $A \in \mathscr{M}(n, \mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$, $P \neq 0$ tel que $P(A) = 0$. Donner une condition suffisante sur P pour que A soit trigonalisable dans $\mathscr{M}(n, \mathbb{R})$. Donner une condition suffisante sur P pour que A soit diagonalisable dans $\mathscr{M}(n, \mathbb{R})$.

Exercice n°9 *(CAPES 2014e - Deuxième composition)*

Soit $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, d'ordre fini c'est à dire telle qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $B^k = I_n$. On note b le plus petit entier strictement positif k tel que $B^k = I_n$.

1) Démontrer que B est inversible.

2) Soit $k \in \mathbb{Z}$. Démontrer que $B^k = I_n$ si et seulement si b divise k.

3) Démontrer que les valeurs propres de B sont des racines b-ièmes de l'unité.

4) Démontrer que B est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice n°10

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur un corps K et P un polynôme annulateur de u.

1) Montrer que $E = \text{Ker } P(u)$ et que toute valeur propre de u est racine de P.

2) Montrer que si $P(0) \neq 0$ alors u est bijectif.

Exercice n°11

Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E, vérifiant $f \circ g - g \circ f = id_E$.

1) Montrer que $\forall Q \in \mathbb{K}[X],\ f \circ Q(g) - Q(g) \circ f = Q'(g)$.

2) Montrer que : $\exists P \in \mathbb{K}[X],\ P \neq 0$ et $P(g) = 0$.

3) Que peut-on en déduire lorsque $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle ?

Exercice n°12

Soit A un vecteur colonne de $\mathbb{R}^n$. Montrer que la matrice carrée $A.{}^tA$ est diagonalisable.

Exercice n°13 *(Deuxième épreuve 1989)*

Soit A une matrice de $\mathscr{M}(d,\mathbb{R})$ $(d \geqslant 2)$ *nilpotente d'indice* r.

1) Montrer que zéro est la seule valeur propre complexe de la matrice A. Quel est le polynôme caractéristique de A ?

2) On désigne par $e(A)$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}(d,\mathbb{R})$ engendré par les matrices $\{A^k,\ k \geqslant 0\}$. Montrer que $\mathscr{B} = \{Id,\ A, \cdots, A^{r-1}\}$ est une base de $e(A)$.

Exercice n°14

Soit $A \in \mathscr{M}(n,\mathbb{C})$ ayant toutes ses valeurs propres deux à deux distinctes.
Montrer que la famille $(I, A, A^2, \cdots, A^{n-1})$ est libre.

Exercice n°15

Pourquoi, en dimension finie, un projecteur est-il toujours diagonalisable ?

Exercice n°16

On donne trois nombres complexes $a,\ b,\ c$ et les deux matrices suivantes :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M = \begin{pmatrix} a & b & c & b & c \\ c & a & b & c & b \\ b & c & a & b & c \\ c & b & c & a & b \\ b & c & b & c & a \end{pmatrix}$$

1) Calculer J^2, J^3, J^4, J^5 ; puis trouver un polynôme P de degré inférieur ou égal à 4 tel que $M = P(J)$.

2) Déterminer les vecteurs propres et les valeurs propres de J. J est-elle diagonalisable ?

3) Déduire des questions 1. et 2. que M est diagonalisable. Préciser ses valeurs propres et ses vecteurs propres.

4) On suppose à présent que $b = c$. Déduire de 3. le polynôme caractéristique de M.

5) On suppose $b = c \neq 0$. Déterminer deux suites de complexes (α_n) et (β_n) telles que $M^n = \alpha_n M + \beta_n I_5$.

Exercice n°17

Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les réels a, b et c pour que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ soit diagonalisable dans $\mathscr{M}(3,\mathbb{R})$.

Même question avec $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & a \\ \sin\theta & \cos\theta & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.