UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre et Géométrie 1

Feuille d'exercices d'algèbre n°1

Espaces vectoriels de dimension finie

Révisions

1) Comment introduit-on les vecteurs en classe de seconde ?

2) Rappeler les définitions d'un ***espace-vectoriel*** et d'un ***sous-espace vectoriel***. Donner des exemples.

3) Qu'appelle-t-on ***sous-espace vectoriel engendré*** par une partie ?
Comment définit-on la somme de deux s.e.v. ? Quand dit-on que deux sous-espaces sont en ***somme directe*** ? Qu'ils sont ***supplémentaires*** ?

4) Qu'est-ce qu'une ***famille libre*** ? Une ***famille génératrice*** ? Une ***base*** ? Donner des exemples.
Comment caractérise-t-on le fait que deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires ?

5) Quand dit-on qu'un espace vectoriel est de ***dimension finie*** ?
Qu'est-ce que le ***rang*** d'une famille de vecteurs ?
Rappeler le théorème de la base incomplète.

Exercice n°1

Les sous-ensembles E et F suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$? Si oui, en donner une base.

$$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ 3x + 2y + t = 0\}, \qquad F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ xy = 0\}.$$

Exercice n°2

Dans $\mathbb{R}^3$, montrer que les vecteurs $a_1 = (1, 2, 3)$ et $a_2 = (2, -1, 1)$ engendrent le même sous-espace vectoriel que $b_1 = (1, 0, 1)$ et $b_2 = (0, 1, 1)$:

1) en écrivant b_1 et b_2 comme combinaisons linéaires de a_1 et de a_2.

2) en donnant une équation qui caractérise le sous-espace vectoriel engendré par a_1 et a_2.

Exercice n°3

Dans $\mathbb{E} = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ montrer que $(\exp, x \mapsto xe^x, x \mapsto \ell n\, x)$ est une famille libre.

Exercice n°4

Soient F et G deux sous-espaces d'un espace vectoriel $\mathbb{E}$.

1) Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace de $\mathbb{E}$ si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

2) En déduire que si $F \neq E$ et $G \neq E$, alors $F \cup G \neq E$.

Exercice n°5 *(CAPES 1998)*

Soient ABC un triangle non aplati et M un point du plan affine. Montrer que si λ, μ et ν ne sont pas tous nuls et vérifient $\lambda\overrightarrow{MA} + \mu\overrightarrow{MB} + \nu\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$ alors on a $\lambda + \mu + \nu \neq 0$.

Exercice n°6 *(Épreuve sur dossier 2016)*

Dans un tétraèdre $ABCD$, I, J et K sont respectivement les milieux de $[AB]$, $[BD]$ et $[BC]$.

Les points E et F sont définis par $\overrightarrow{AE} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{CF} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{CJ}$. Démontrer que I, E, F et K sont coplanaires.

Exercice n°7 *(Épreuve sur dossier 2016)*

L'espace est rapporté à un repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Dans ce repère, on définit les quatre points $A(1;2;3)$, $B(2;-1;0)$, $C(0;-3;1)$ et $D(-1;0;2)$. Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ?

Exercice n°8 *(Épreuve sur dossier 2018)*

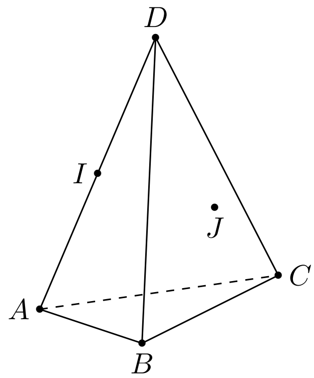
$ABCD$ est un tétraèdre.

I est le milieu du segment $[AD]$.

J est le point de la face BCD défini par : $\overrightarrow{BJ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BD}$.

1) On se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.
Déterminer les coordonnées du point K, intersection de la droite (IJ) et du plan (ABC).

2) Sans utiliser de repère, donner une construction du point K.



Exercice n°9 *(CAPES 2019 - Première composition)*

1) Donner sans justification une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ puis une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

2) Montrer que $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{C}^2 \right\}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.
En donner une base.

Exercice n°10

$\mathbb{E}$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, F, G, H sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$.

Dire (démonstration à l'appui) si chacun des énoncés suivants est vrai ou faux (faire des dessins).

1) Le complémentaire d'un hyperplan est une droite.

2) Si $F \cap G = G \cap H = H \cap F = \{0\}$ alors $\dim\ (F+G+H) = \dim F + \dim G + \dim H$.

3) Si H et K sont deux hyperplans de $\mathbb{E}$ alors $H \cup K \neq \mathbb{E}$.

4) Si P_1 et P_2 sont deux plans de $\mathbb{E}$, vérifiant $P_1 \cap P_2 = \{0\}$ alors $\dim \mathbb{E} \geqslant 4$.

Applications linéaires

Révisions

1) Rappeler la définition d'une ***application linéaire*** entre deux espaces vectoriels E et F. Qu'est-ce qu'un ***endomorphisme*** ?

2) Rappeler les définitions des exemples classiques (homothéties, projections, symétries). Illustrer graphiquement.

3) Rappeler les définitions du ***noyau*** $\operatorname{Ker} f$ et de l'***image*** $\operatorname{Im} f$ d'un endomorphisme f.
Énoncer le théorème du rang.

4) Qu'appelle-t-on ***valeur propre*** et ***sous-espace propre*** associé d'un endomorphisme ? Donner des exemples.

5) Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies munis respectivement des bases $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_p)$ et $\mathscr{C} = (f_1, \cdots, f_n)$. Rappeler la définition de la ***matrice*** de l'application linéaire $f : E \to F$ relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$. Quels sont les effets de changements de bases ?

Exercice n°11

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (x_1 - 2x_2 - 3x_3, x_1 - 2x_2 - 3x_3, -x_1 + 2x_2 + 3x_3)$.
Montrer que f est linéaire et déterminer $\mathrm{Ker}\ f$ et $\mathrm{Im}\ f$. A-t-on $\mathrm{Im}\ f \subset \mathrm{Ker}\ f$? $\mathrm{Ker}\ f \subset \mathrm{Im}\ f$?

Exercice n°12

On cherche à résoudre l'équation différentielle $\quad ay'' + by' + cy = 0$
où a, b, c sont des constantes réelles, avec $a \neq 0$. On veut trouver les fonctions y, deux fois continûment dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, qui vérifient cette équation.

1) Montrer que les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) forment un espace vectoriel réel que l'on notera $\mathscr{E}$.

2) Soient y_1 et y_2 deux solutions de (E) telles que l'application $W(y_1, y_2) : x \mapsto y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$ ne s'annule pas. $W(y_1, y_2)$ est appelé le ***Wronskien*** des deux solutions y_1 et y_2 et on a

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

a) Soit y une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, le système

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y(x) & = & c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) \\ y'(x) & = & c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x) \end{array} \right.$$

admet une solution unique $(c_1(x), c_2(x))$ et que c_1 et c_2 sont des fonctions continûment dérivables.

b) On suppose maintenant que y est solution de (E). Montrer que c_1 et c_2 sont des constantes.

c) En déduire que (y_1, y_2) est une base de $\mathscr{E}$.

3) Soit $r \in \mathbb{R}$. Montrer que $y : x \mapsto e^{rx}$ est solution de (E) si et seulement si r vérifie $ar^2 + br + c = 0$. Le polynôme $P(r) = ar^2 + br + c$ est appelé ***polynôme caractéristique*** de l'équation différentielle.

a) On suppose que le polynôme P a deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 ($b^2 - 4ac > 0$). Montrer que $y_1 : x \mapsto e^{r_1 x}$ et $y_2 : x \mapsto e^{r_2 x}$ forment une base de $\mathscr{E}$.

b) On suppose que le polynôme caractéristique a une racine réelle double s ($b^2 - 4ac = 0$). Montrer que $y_1 : x \mapsto e^{sx}$ et $y_2 : x \mapsto xe^{sx}$ forment une base de $\mathscr{E}$.

c) On suppose que le polynôme caractéristique a deux racines complexes non réelles conjuguées distinctes $\lambda = \alpha + i\beta$ et $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ ($b^2 - 4ac < 0$). Montrer que $y_1 : x \mapsto e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ et $y_2 : x \mapsto e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ forment une base de $\mathscr{E}$.

Exercice n°13 *(CAPES 2016 - Première composition)*

Pour tout naturel n, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.
Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et soient $a_1, \cdots, a_n$ des réels deux à deux distincts.
Pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, on considère le polynôme

$$L_k(X) = \prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq k}} \frac{X - a_i}{a_k - a_i}.$$

On considère l'application $F : \left\{ \begin{array}{rl} \mathbb{R}_{n-1}[X] & \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ P & \longmapsto (P(a_1), \cdots, P(a_n)). \end{array} \right.$

1) Montrer que F est une application linéaire.

2) Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, montrer qu'il existe un polynôme P dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $F(P) = e_k$.

3) Montrer que F est surjective, puis justifier que F est bijective.

Exercice n°14

Soient E un espace vectoriel de dimension 4, $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ une base de E, F un espace vectoriel de dimension 5, $\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$ une base de F.
Lorsque cela est possible, comment construire une application linéaire u de E dans F qui vérifie la condition :

1) $\mathrm{Im}\ u = \mathrm{vect}(f_1, f_2, f_3)$
2) $\mathrm{Im}\ u = \mathrm{vect}(f_4)$
3) $\mathrm{Im}\ u = F$
4) $\mathrm{Ker}\ u = \mathrm{vect}(e_3)$
5) $\mathrm{Ker}\ u = \mathrm{vect}(e_1, e_3)$ et $\mathrm{Im}\ u = \mathrm{vect}(f_1, f_2)$
6) $\mathrm{Ker}\ u = \mathrm{vect}(e_3, e_4)$ et $\mathrm{Im}\ u = \mathrm{vect}(f_1, f_2, f_3)$

Exercice n°15

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des fonctions polynômiales à coefficients réels de degré au plus n ($n \in \mathbb{N}^*$).
Soit $\Phi : E \longrightarrow E,\ P \longmapsto \Phi(P)$ où $\Phi(P) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \dfrac{P(x) + P(-x)}{2}$.

1) Vérifier que Φ est linéaire.

2) Déterminer $\mathrm{Ker}\ \Phi$ et $\mathrm{Im}\ \Phi$. Calculer leurs dimensions respectives et en donner des bases. Montrer que $E = \mathrm{Ker}\ \Phi \oplus \mathrm{Im}\ \Phi$.

Exercice n°16

Soient E un espace vectoriel et $f : E \to E$ une application linéaire.

1) On suppose que $f^3 = 0$. f est-elle injective ? surjective ?

2) On suppose que $f^3 + 2f^2 - Id = 0$. Montrer que f est inversible et déterminer son inverse.

Exercice n°17

Un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ est dit *nilpotent* s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f^p = 0$. Dans ce cas, *l'indice* de f est le plus petit entier p tel que $f^p = 0$. On considère $f \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent d'indice p.

1) Soit $\overrightarrow{u} \in E \setminus \mathrm{Ker}\ f^{p-1}$. Montrer que la famille $(\overrightarrow{u}, f(\overrightarrow{u}), \ldots, f^{p-1}(\overrightarrow{u}))$ est libre.

2) En déduire que si E est de dimension finie n, alors $f^n = 0$.

Exercice n°18

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\Delta : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}[X],\ P \mapsto P(X+1) - P(X)$.

1) Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer $\mathrm{Ker}\ \Delta$.

2) Donner la dimension de $\mathrm{Im}\ \Delta$. Que dire de la famile $\left(\Delta(X^k)\right)_{1 \leqslant k \leqslant n}$? En déduire $\mathrm{Im}\ \Delta$ et montrer que pour tout entier $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $X^k \in \mathrm{Im}\ \Delta$.

3) En déduire que pour ces entiers k, il existe un polynôme P_k, dont on peut supposer le terme constant égal à zéro, tel que $X^k = P_k(X+1) - P_k(X)$.

4) Calculer, pour $N \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} j^3$.

Exercice n°19

Soient E un espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$. On pose $N_k = \text{Ker } (f^k)$ et $I_k = \text{Im } (f^k)$.

1) Montrer que la suite (N_k) est croissante (pour l'inclusion) et que la suite (I_k) est décroissante.

2) Montrer que s'il existe un p tel que $N_p = N_{p+1}$ alors $N_p = N_{p+r}$ pour tout r de $\mathbb{N}$.

3) On suppose à présent E de dimension finie.

a) Montrer que les suites (N_k) et (I_k) sont stationnaires à partir du même rang p.

b) Montrer que $N_p \oplus I_p = E$.

Exercice n°20

Soit E l'espace vectoriel réel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit u l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall f \in E,\ \forall x \in \mathbb{R},\ u(f)(x) = f(-x)$$

Déterminer les valeurs propres de u et montrer que E est somme directe des sous-espaces propres associés.

Exercice n°21

On appelle projecteur d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, tout endomorphisme p de E vérifiant $p \circ p = p$.
Montrer que si p est un projecteur de E alors $E = \text{Ker } p \oplus \text{Im } p$ et $\text{Im } p = \text{Ker } (id_E - p)$.

Exercice n°22

Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimensions finies sur le corps $\mathbb{K}$.

1) Soient $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$. Montrer que $\text{rg } (v \circ u) \leqslant \min(\text{rg } u, \text{rg } v)$.
En déduire que pour des endomorphismes en dimension finie, si $v \circ u$ est bijectif, alors u et v le sont.

2) Soit $u : \left| \begin{array}{c} \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X] \\ P \mapsto XP \end{array} \right.$ Trouver $v \in \mathscr{L}(\mathbb{K}[X])$ tel que $v \circ u = \text{id}_{\mathbb{K}[X]}$. Montrer que ni u, ni v ne sont bijectifs.

Exercice n°23 *(CAPES 2016 - Première composition)*

Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$ est la matrice de l'application linéaire F définie dans l'exercice 13 dans des bases bien choisies.