Chapitre 2

Isométries du plan affine euclidien

Dans tout le chapitre, X désigne un plan affine euclidien, c'est-à-dire un espace affine dont l'espace vectoriel associé $\overrightarrow{X}$ est plan vectoriel euclidien.

2.1 Généralités sur les isométries

Un espace affine euclidien est muni d'une distance naturelle : $d(x,y) = \|\overrightarrow{xy}\|$ et on peut donc parler d'isométrie.

Définition 2.1 *On appelle isométrie de X toute application $f : X \to X$ qui conserve la distance c'est à dire qui vérifie : $\forall m, n \in X$, $\|\overrightarrow{mn}\| = \|\overrightarrow{f(m)f(n)}\|$.*

Exemple. Toute symétrie orthogonale de X *(et en particulier toute réflexion)* est une isométrie.

Démonstration : Soit f une symétrie orthogonale d'axe Y. f est alors affine et son application linéaire associée $\overrightarrow{f}$ est la réflexion d'axe $\overrightarrow{Y}$. Soient alors $m, n \in X$. $\overrightarrow{mn}$ se décompose dans $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{Y} \oplus \overrightarrow{Y}^{\perp}$ en $\overrightarrow{mn} = u+v$ avec u dans F et v dans $F^{\perp}$. Le théorème de Pythagore montre que : $\|\overrightarrow{mn}\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$. D'autre part, $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{mn}) = u-v$ et donc $\|\overrightarrow{f(m)f(n)}\|^2 = \|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{mn})\|^2 = \|u-v\|^2$. Le théorème de Pythagore permet alors de conclure. □

Remarque. *(hyperplan médiateur)* Étant donnés deux point distincts A et B de X, l'ensemble des points équidistants de A et B est l'hyperplan passant par le milieu I de $[AB]$ et orthogonal à (AB).
Démonstration : Soit $M \in X$. $d(A,M) = d(B,M) \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AM}\|^2 = \|\overrightarrow{BM}\|^2$ et donc, en introduisant I par la relation de Chasles, $d(A,M) = d(B,M) \Leftrightarrow <\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{IM}> = <\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BM}>$ soit $d(A,M) = d(B,M) \Longleftrightarrow <\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IM}> = 0$. □

Définition 2.2 *Une isométrie f de X est dite directe ou positive (respectivement indirecte ou négative) si $\overrightarrow{f}$ l'est. On définit de même le déterminant de f comme étant celui de $\overrightarrow{f}$.*

2.2 Isométries du plan

2.2.1 Isométries et réflexions

Théorème 2.3 (*(Classification des isométries du plan par les points fixes)*) *Soient X un plan affine euclidien et f une isométrie de X. On rappelle qu'une rotation est une composée de deux réflexions dont les axes sont soit confondus, soit sécants en un point.*

- *S'il existe trois points a_1, a_2 et a_3* non alignés *fixés par f (i.e $f(a_1) = a_1$, $f(a_2) = a_2$ et $f(a_3) = a_3$), alors f est l'identité.*

- *Si f fixe deux points distincts a_1 et a_2 alors f est soit l'identité soit la réflexion d'axe (a_1a_2).*
- *Si f fixe le point a_1 de X alors f est soit l'identité, soit une réflexion dont l'axe passe par a_1, soit une rotation qui laisse a_1 invariant.*
- *Toute isométrie du plan est composée d'au plus trois réflexions.*

Démonstration :

- La démonstration se fait par l'absurde.

  Supposons que f ne soit pas l'identité. Il existe donc un point m de X tel que $m' = f(m)$ soit *distinct* de m. L'ensemble des points équidistants de m et m' est une droite Δ. Soit $i \in \{1,2,3\}$. f est une isométrie donc $d(f(a_i), f(m)) = d(a_i, m)$ et comme $f(a_i) = a_i$, $d(a_i, m') = d(a_i, m)$. Ce qui montre que a_i appartient à Δ. Cela est contraire à l'hypothèse a_1, a_2 et a_3 non alignés.

- Supposons que f ne soit pas l'identité. Il existe donc un point b tel que $b' = f(b) \neq b$. Soit D la médiatrice de b et b'. Comme f est une isométrie $d(f(o), f(b)) = d(o, b)$, soit encore $d(o, b') = d(o, b)$ et o appartient à D. De même on montre que a appartient à D. Il en résulte aussi que o, a, b ne sont pas alignés. Soit s la réflexion d'axe D et $g = s \circ f$. Il est clair que $g(o) = o$, $g(a) = a$ et $g(b) = s(f(b)) = s(b') = b$. Ayant trois points fixes non alignés g est l'identité. L'égalité $s \circ f = Id$ implique $f = s$ (en composant à gauche par s).

- Soit f une isométrie telle que $f(o) = o$. Si $f = Id$, il n'y a rien à démontrer. Supposons donc que $f \neq Id$. Il existe donc un point a tel que $f(a) \neq a$, ce qui implique $o \neq a$. Soit $b = f(a)$; on a $d(o, a) = d(o, b)$ car f est une isométrie. Soit alors s la réflexion qui fixe o et telle que $s(b) = a$. Considérons $g = s \circ f$ qui vérifie $g(o) = o$ et $g(a) = a$. La question précédente montre que ou bien $g = Id$ ou bien g est la réflexion s' d'axe (oa). Dans le premier cas $s \circ f = Id$, ce qui implique $f = s$. Dans le second cas $s \circ f = s'$, ce qui implique $f = s \circ s'$ et f est bien une rotation puisque les deux axes des réflexions passent par o.

- Soit f une isométrie. Si $f = Id$, c'est, pour toute réflexion s, la composée $s \circ s$. Si f n'est pas l'identité, il existe un point o tel que $o' = f(o) \neq o$. Soit s la réflexion telle que $s(o) = o'$ et $g = s \circ f$ qui vérifie $g(o) = o$. La question précédente montre que ou bien g est une réflexion s' ou bien g est la composée de deux réflexions $s' \circ s''$. Dans le premier cas l'égalité $s \circ f = s'$ implique $f = s \circ s'$ et dans le second l'égalité $s \circ f = s' \circ s''$ implique $f = s \circ s' \circ s''$.

□

Corollaire. L'ensemble $Is(X)$ des isométries de X est un groupe et pour tout point o de X, l'ensemble $Is_o(X)$ des isométries de X fixant o est un sous-groupe de $Is(X)$.

Démonstration : L'ensemble des isométries est contenu dans le groupe des bijections de X, stable par composition, contenant Id. Il reste donc à démontrer que si f est une isométrie, alors f^{-1} est aussi une isométrie. Ceci résulte de la question précédente : si $s_1, \ldots, s_p$ sont des réflexions et $f = s_1 \circ \ldots \circ s_p$ alors $f^{-1} = s_p \circ \ldots \circ s_1$.
Le fait que Is_o est un sous-groupe de $Is(X)$ résulte d'un cas général : si un groupe G opère sur un ensemble X, pour tout point o de X le groupe d'isotropie de o (appelé aussi stabilisateur de o), noté G_o en général, défini par $G_o = \{g \in G \mid g(o) = o\}$ est un sous groupe de G.
□

2.2.2 Catalogue des isométries du plan

Le théorème précédent permet de faire un catalogue des isométries du plan. Outre **l'identité** il y a donc :

Les réflexions

Remarquons que si f est la réflexion d'axe $\mathcal{D}$ alors $\overrightarrow{f}$ est la réflexion d'axe $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ et si o est un point de $\mathcal{D}$, f est caractérisée par : $\forall m \in X,\ f(m) = o + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{om})$ et en particulier f est l'application de X dans X qui à tout point m associe lui même si $m \in \mathcal{D}$ et l'unique point m' tel que $\mathcal{D}$ soit la médiatrice de $[mm']$ sinon.

Les translations

Proposition 2.4 *La composée de deux réflexions par rapport à des droites parallèles est une translation. Plus précisément, si $\mathcal{D}_2 /\!/ \mathcal{D}_1$ alors $s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}_1} = t_{\overrightarrow{2H_1H_2}}$ où H_1 est un point quelconque de $\mathcal{D}_1$ et H_2 le projeté orthogonal de H_1 sur $\mathcal{D}_2$.*
Réciproquement, toute translation $t_{\overrightarrow{u}}$ peut s'écrire comme composée $s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}_1}$ de deux réflexions d'axes parallèles ($\mathcal{D}_1$ étant choisie arbitrairement mais orthogonale à $\overrightarrow{u}$ et $\mathcal{D}_2$ étant alors $\mathcal{D}_2 = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{u}}(\mathcal{D}_1)$).

Démonstration : Le premier point est clair puisque l'application linéaire associée à $s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}_1}$ est $s_{\overrightarrow{\mathcal{D}_2}} \circ s_{\overrightarrow{\mathcal{D}_1}} = id_{\overrightarrow{X}}$. Soient alors $H_1 \in \mathcal{D}_1$ et H_2 le projeté orthogonal de H_1 sur $\mathcal{D}_2$. $s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}_1}(H_1) = s_{\mathcal{D}_2}(H_1) = H_2 + s_{\overrightarrow{\mathcal{D}}_2}(\overrightarrow{H_2H_1})$ donc $s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}_1}(H_1) = H_2 - \overrightarrow{H_2H_1} = H_1 + 2\overrightarrow{H_1H_2}$.
Enfin, si $\mathcal{D}_1$ est orthogonale à $\overrightarrow{u}$ et $\mathcal{D}_2 = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{u}}(\mathcal{D}_1)$ alors $\mathcal{D}_2 /\!/ \mathcal{D}_1$ et $s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}_1} = t_{\overrightarrow{u}}$ puisque le projeté orthogonal d'un point H_1 de $\mathcal{D}_1$ sur $\mathcal{D}_2$ n'est autre que $H_2 = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{u}}(H_1)$. □

Les rotations

Soit $r \neq id$ une rotation du plan. r est la composée de deux réflexions d'axes $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sécants en un point A. Remarquons tout de suite que A est le seul point fixe de r (il est appelé *centre* de la rotation) : si B est un point fixe de r alors $s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}_1}(B) = B$ donc $s_{\mathcal{D}_2}(B) = s_{\mathcal{D}_1}(B)$. Si on pose C ce dernier point, on ne saurait avoir $C \neq B$ car alors l'unicité de la réflexion envoyant B sur C conduirait à $\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_1$ donc à $r = id$. Par suite $C = B \in \mathcal{D}_2 \cap \mathcal{D}_1$.
r est alors caractérisée par son centre et son application linéaire associée $s_{\overrightarrow{\mathcal{D}_2}} \circ s_{\overrightarrow{\mathcal{D}_1}}$ qui est une rotation vectorielle $\overrightarrow{r}$. $\overrightarrow{r}$ est entièrement déterminée par son angle θ et on notera finalement $r = r_{A,\theta}$ et on parlera de la rotation de centre A et d'angle θ.

Proposition 2.5 *La rotation $r = r_{A,\theta}$ est l'application de X dans X qui à tout point M associe lui même si $M = A$ et l'unique point M' vérifiant $AM = AM'$ et $(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}}) = \theta$ sinon.*

Démonstration : Si $r = r_{A,\theta}$ on a bien $r(A) = A$ et pour $M \neq A$, $Ar(M) = r(A)r(M) = AM$ (r est une isométrie) et $(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{Ar(M)}}) = (\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{r}(\overrightarrow{AM})}) = \theta$.
Réciproquement, pour $M \neq A$, les relations $AM = AM'$ et $(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}}) = \theta$ définissent bien un unique point M'. En effet, θ peut s'écrire sous la forme $\theta = (\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{v}})$ avec $\|\overrightarrow{v}\| = AM$ et l'unicité de la rotation envoyant un vecteur non nul sur un vecteur de même norme conduit à $\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{v}$. □

Proposition 2.6 *Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites sécantes en un point A. Soient $\overrightarrow{u_1} \in \overrightarrow{\mathcal{D}_1} \backslash \{\overrightarrow{0}\}$ et $\overrightarrow{u_2} \in \overrightarrow{\mathcal{D}_2} \backslash \{\overrightarrow{0}\}$ alors $s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}_1} = r_{A,2(\widehat{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}})}$.*
Réciproquement, toute rotation de centre A et d'angle θ peut se décomposer sous la forme $r_{A,\theta} = s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}_1}$ où $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont deux droites sécantes en A, l'une d'entre-elles pouvant être choisie arbitrairement (passant par A).

Démonstration : Le premier point est clair : A est bien un point fixe de r et si on pose $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{r}(\overrightarrow{u_1}) = s_{\overrightarrow{\mathcal{D}_2}}(u_1)$ on a $\theta = (\widehat{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{r}(\overrightarrow{u_1})}) = (\widehat{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}}) + (\widehat{\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v}})$ d'où, les réflexions inversant

les angles, $\theta = (\widehat{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}}) + (\widehat{s_{\overrightarrow{\mathcal{D}_2}}(\overrightarrow{u_2}), s_{\overrightarrow{\mathcal{D}_2}}(\overrightarrow{u_1})}) = (\widehat{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}}) - (\widehat{\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_1}})$.
Soient réciproquement $r_{A,\theta}$ une rotation et, par exemple, $\mathcal{D}_1$ une droite passant par A. Introduisons un vecteur unitaire $\overrightarrow{u_1}$ de $\mathcal{D}_1$ et un angle orienté de vecteurs α solution de l'équation $2\alpha = \theta$ (l'existence d'un tel angle a été vue en exercice). α peut s'écrire $\alpha = (\widehat{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}})$ et il est alors clair que la droite $\mathcal{D}_2$ passant par A et dirigée par $\overrightarrow{u_2}$ est telle que $r_{A,\theta} = s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}_1}$. □

Exercice 2.1 Montrer que l'ensemble des rotations du plan fixant le point A est un groupe pour la composition des applications.

Exercice 2.2 Que peut-on dire de la composée de deux rotations du plan ? Cette composée est-elle commutative ?

Les symétries glissées

Définition 2.7 *Soient $\mathcal{D}$ une droite de X (plan affine euclidien) et $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{D}} \setminus \{0\}$. On appelle* **symétrie glissée** *d'axe $\mathcal{D}$ et de vecteur $\overrightarrow{u}$, la composéee $t_{\overrightarrow{u}} \circ s_{\mathcal{D}}$.*

Remarques. D'après un résultat d'algèbre linéaire, cette composée est commutative puisque l'on a Ker $\left(\overrightarrow{s_{\mathcal{D}}} - id_{\overrightarrow{X}}\right) = \overrightarrow{\mathcal{D}}$. En particulier, si f est une symétrie glissée, $f^2 = t_{2\overrightarrow{u}}$ où $\overrightarrow{u}$ est le vecteur de cette symétrie glissée. Une symétrie glissée n'a donc pas de point fixe.

Lemme 2.8 *La composée d'une réflexion d'axe $\mathcal{D}$ et d'une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ est une réflexion d'axe parallèle à $\mathcal{D}$ si $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{\mathcal{D}}$ et une symétrie glissée sinon.*

Démonstration : Supposons tout d'abord $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{\mathcal{D}}$. On a vu qu'alors la translation $t_{\overrightarrow{u}}$ pouvait se décomposer sous la forme $t_{\overrightarrow{u}} = s_{\mathcal{D}} \circ s_{\mathcal{D}'}$ avec $\mathcal{D}' // \mathcal{D}$. Par suite, $s_{\mathcal{D}} \circ t_{\overrightarrow{u}} = s_{\mathcal{D}'}$.
Soit à présent un vecteur quelconque $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{X} = \overrightarrow{\mathcal{D}} \oplus \overrightarrow{\mathcal{D}}^{\perp}$ que l'on écrit $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ avec $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathcal{D}}$ et $\overrightarrow{w} \in \overrightarrow{\mathcal{D}}^{\perp}$. $\overline{s_{\mathcal{D}} \circ t_{\overrightarrow{u}}} = \overline{s_{\mathcal{D}} \circ t_{\overrightarrow{w}}} \circ t_{\overrightarrow{v}} = \overline{s_{\mathcal{D}'} \circ t_{\overrightarrow{v}}}$ où (d'après ce qui précède) $\mathcal{D}' /\!/ \mathcal{D}$: c'est bien une symétrie glissée lorsque $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$. □

Proposition 2.9 *La composée de trois réflexions du plan est ou bien une réflexion ou bien une symétrie glissée.*

Démonstration : Soit donc $f = s_{\mathcal{D}_3} \circ s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}_1}$. Si $\mathcal{D}_3 /\!/ \mathcal{D}_2$ alors $s_{\mathcal{D}_3} \circ s_{\mathcal{D}_2}$ est une translation. Si $\mathcal{D}_3 \cap \mathcal{D}_2 = \{A\}$ alors $s_{\mathcal{D}_3} \circ s_{\mathcal{D}_2}$ est une rotation de centre A qui peut se décomposer sous la forme $s_{\mathcal{D}} \circ s_{\mathcal{D}'}$ où $\mathcal{D}'$ est la parallèle à $\mathcal{D}_1$ passant par A. Dans les deux cas, on se ramène donc à la composée d'une translation et d'une réflexion et le résultat annoncé découle du lemme précédent. □

Tableau récapitulatif

Classification des isométries d'un plan affine euclidien X

Nom du déplacement	Notation	Isom. vect.	Ens. des points fixes
Identité	id_X	$id_{\overrightarrow{X}}$	X
Translation de vecteur $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$	$t_{\overrightarrow{u}}$	$id_{\overrightarrow{X}}$	$\emptyset$
Rotation de centre A, d'angle θ (non nul)	$R_{A,\theta}$	$\overrightarrow{r_\theta}$	$\{A\}$
Nom de l'anti-déplacement	**Notation**	**Isom. vect.**	**Ens. des points fixes**
Réflexion d'axe $\mathcal{D}$	$s_{\mathcal{D}}$	$s_{\overrightarrow{\mathcal{D}}}$	$\mathcal{D}$
Symétrie glissée d'axe $\mathcal{D}$, de vecteur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{D}} \setminus \{\overrightarrow{0}\}$	$t_{\overrightarrow{u}} \circ s_{\mathcal{D}}$	$s_{\overrightarrow{\mathcal{D}}}$	$\emptyset$