Université de Rennes

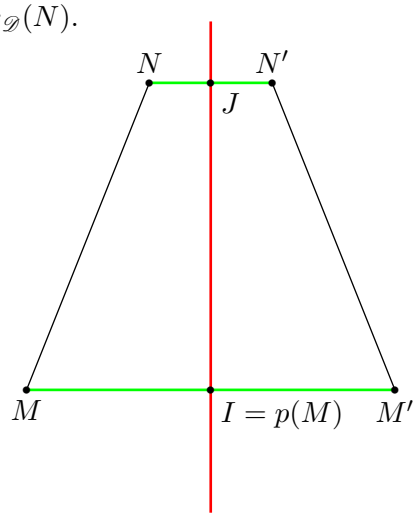
AG1 - Géométrie / PRA1 - Probabilités

Correction rapide du contrôle du 3 novembre 2025

Exercice n°1

1) On appelle réflexion d'axe $\mathscr{D}$ l'application $s_{\mathscr{D}}$ de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{p(M)M'} = \overrightarrow{Mp(M)}$ où $p(M)$ est le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{D}$ (c'est à dire le point d'intersection de $\mathscr{D}$ avec la perpendiculaire à $\mathscr{D}$ passant par M).
Définition alternative : on appelle réflexion d'axe $\mathscr{D}$ l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui fixe tous les points de $\mathscr{D}$ et envoie tout autre point M sur l'unique point M' tel que $\mathscr{D}$ soit la médiatrice du segment $[MM']$.

2) Soit $(M, N) \in \mathscr{P}^2$. Notons I (respectivement J) le projeté orthogonal de M (resp. N) sur $\mathscr{D}$. Notons $M' = s_{\mathscr{D}}(M)$ et $N' = s_{\mathscr{D}}(N)$.



$MN^2 = \overrightarrow{MN}^2 = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JN}\right)^2$. Comme $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IJ} = 0 = \overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{JN}$, en développant ce carré scalaire on obtient $MN^2 = MI^2 + IJ^2 + JN^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{JN}$.
Le même calcul donne $M'N'^2 = M'I^2 + IJ^2 + JN'^2 + 2\overrightarrow{M'I}.\overrightarrow{JN'}$. Or, $M'I = MI$, $JN' = JN$, $\overrightarrow{M'I} = -\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{JN'} = -\overrightarrow{JN}$. On a donc $M'N'^2 = MN^2$ soit $M'N' = MN$; $s_{\mathscr{D}}$ conserve donc les distances : c'est une isométrie.
Autre méthode : On considère un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où $O \in \mathscr{D}$ et $\vec{i}$ dirige $\mathscr{D}$. La réflexion d'axe $\mathscr{D}$ est alors l'application qui à tout point M de coordonnées (x_M, y_M) associe le point M' de coordonnées $(x_M, -y_M)$. Soit alors $(M, N) \in \mathscr{P}^2$. On a $MN^2 = (x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2$ et $M'N'^2 = (x_N - x_M)^2 + (-y_N - (-y_M))^2 = MN^2$ donc $M'N' = MN$.
On a montré que $s_{\mathscr{D}}$ est une isométrie du plan.

Exercice n°2

Soit f une application du plan $\mathscr{P}$ dans lui même telle que : $\forall (M, N) \in \mathscr{P}^2 \quad \overrightarrow{f(M)f(N)} = -2\overrightarrow{MN}$.
• Montrons que f a un point fixe Ω.
Fixons un point O du plan. Un point M du plan est fixe par f si et seulement si $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Of(M)}$ soit $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Of(O)} + \overrightarrow{f(O)f(M)} = \overrightarrow{Of(O)} - 2\overrightarrow{OM}$. f a donc un unique point fixe Ω caractérisé par $\overrightarrow{O\Omega} = \frac{1}{3}\overrightarrow{Of(O)}$.
• Montrons que f l'homothétie de centre Ω et de rapport -2. Soit M un point du plan. On a alors $\overrightarrow{\Omega f(M)} = \overrightarrow{f(\Omega)f(M)}$ (car f fixe Ω) et donc (par définition de f) $\overrightarrow{\Omega f(M)} = -2\overrightarrow{\Omega M}$. f est donc bien une homothétie.

Exercice n°3

Soit f une application de E dans F (où E et F sont deux ensembles non vides).

1) On dit que f est ***injective*** si : $\forall (x, x') \in E^2,\ f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'$.

2) Soit B une partie de F. On appelle ***image réciproque*** de B par f l'ensemble

$$f^{-1}(B) = \{x \in E,\ f(x) \in B\}.$$

3) Soit g une application de F dans G (où G est un ensemble non vide). On note $h = g \circ f$.
On suppose h injective et f surjective. Montrons que g est injective. Soit $(y, y') \in F^2$. Puisque f est surjective, on peut considérer x et x' dans E tels que $y = f(x)$ et $y' = f(x')$. Supposons $g(y) = g(y')$. On a alors $g[f(x)] = g[f(x')]$ soit $h(x) = h(x')$ et donc $x = x'$ (car h est injective). Cela donne alors $f(x) = f(x')$ soit $y = y'$. On a montré : $\forall (y, y') \in F^2,\ g(y) = g(y') \Longrightarrow y = y'$: g est injective.

Exercice n°4

Une main de trois cartes peut être vue comme une partie à trois éléments de l'ensemble des trente-deux cartes. Il y en a donc $\binom{32}{3} = \dfrac{32.31.30}{3.2.1} = 4\,960$.
Notons $\mathscr{M}$ l'ensemble des mains de trois cartes comportant au moins un roi et au moins un carreau. Son complémentaire $\overline{\mathscr{M}}$ est alors l'ensemble des mains de trois cartes ne comportant aucun roi **ou** aucun carreau. On a donc $\overline{\mathscr{M}} = \mathscr{R} \cup \mathscr{K}$ où $\mathscr{R}$ (respectivement $\mathscr{K}$) désigne l'ensemble des mains de trois cartes ne comportant aucun roi (respectivement aucun carreau). Par suite,

$$\text{card}(\overline{\mathscr{M}}) = \text{card}(\mathscr{R}) + \text{card}(\mathscr{K}) - \text{card}(\mathscr{R} \cap \mathscr{K})$$

Or :
• $\mathscr{R}$ est l'ensemble des parties à trois éléments de l'ensemble des vingt-huit cartes qui ne sont pas des rois donc $\text{card}(\mathscr{R}) = \binom{28}{3} = 3\,276$.
• $\mathscr{K}$ est l'ensemble des parties à trois éléments de l'ensemble des vingt-quatre cartes qui ne sont pas des carreaux donc $\text{card}(\mathscr{K}) = \binom{24}{3} = 2\,024$.
• $\mathscr{R} \cap \mathscr{K}$ est l'ensemble des parties à trois éléments de l'ensemble des vingt-et-une cartes qui ne sont pas des rois ni des carreaux donc $\text{card}(\mathscr{R} \cap \mathscr{K}) = \binom{21}{3} = 1\,330$.
Finalement, $\text{card}(\overline{\mathscr{M}}) = 3\,276 + 2\,024 - 1\,330 = 3\,970$ et en conséquence $\text{card}(\mathscr{M}) = 4\,960 - 3\,970 = 990$.