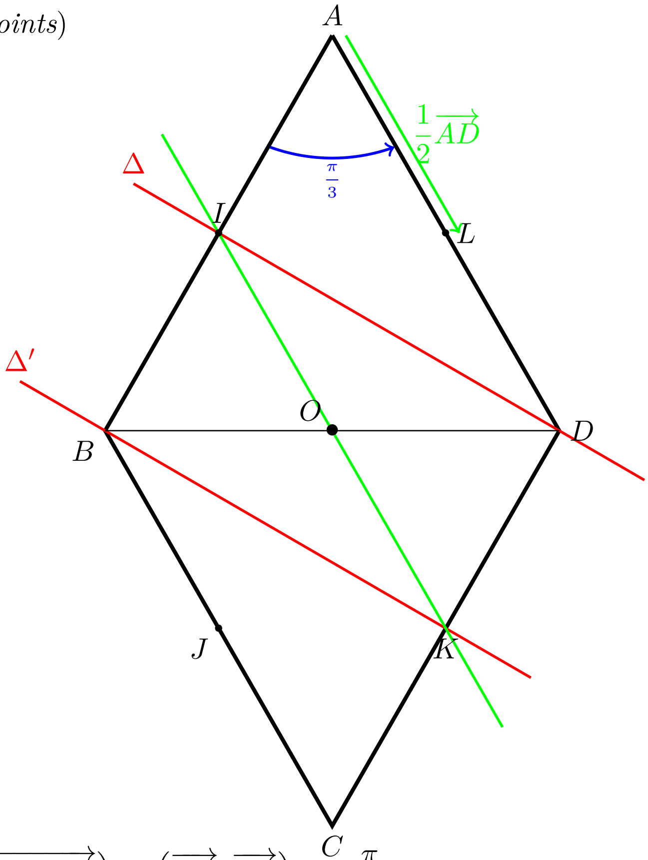
Université de Rennes

AG1 - Géométrie

Correction rapide du contrôle du 20 décembre 2024

$\boxed{\text{Exercice n°1}}$ *(11,5 points)*



1)

a) On a $\left(\overrightarrow{f(A)f(B)}, \overrightarrow{f(A)f(D)}\right) = \left(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}\right) = -\dfrac{\pi}{3}$ donc l'isométrie f ne conserve pas les angles orientés de vecteurs : c'est un antidéplacement.

b) Si $f(M) = M$ alors, f étant une isométrie, $MA = f(M)f(A) = MB$ et de même $MB = f(M)f(B) = MD$ et $MD = f(M)f(D) = MC$. M est donc équidistant des points A, B, C et D. Un tel point M n'existe donc pas car le losange n'est pas un carré (puisque $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \neq \dfrac{\pi}{2}$).

2) $r \circ \sigma$ est une isométrie (comme composée d'isométries) et vérifie $r \circ \sigma(A) = r(B) = B$, $r \circ \sigma(B) = r(A) = D$ et $r \circ \sigma(D) = r(D) = C$. L'isométrie $f^{-1} \circ (r \circ \sigma)$ fixe donc les trois points non alignés A, B et D : c'est donc l'identité et $f = r \circ \sigma$.
Comme $\sigma \circ r(B) = \sigma(B) = A \neq f(B)$, on a $\sigma \circ r \neq f$.

3)

a) L'axe de la réflexion s_1 passant par le centre de la rotation r, on peut trouver une réflexion s_2 telle que $r = s_1 \circ s_2$. En composant à gauche par s_1 on a $s_1 \circ r = s_2$ donc $s_2(D) = s_1(C) = C$. s_2 est par suite la réflexion d'axe la médiatrice Δ' de $[CD]$

b) On a donc $f = (s_1 \circ s_2) \circ \sigma = s_1 \circ (s_{\Delta'} \circ s_\Delta)$.
Comme Δ et Δ' sont parallèles, $s_{\Delta'} \circ s_\Delta = t_{2\overrightarrow{IB}} = t_{\overrightarrow{AB}}$ puisque $(IB) \perp \Delta$.

4)

a) Remarquons qu'une isométrie conservant les milieux, on a $f(I) = O$ et $f(O) = K$.
On a $g(D) = t_{-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}}(C) = J$, $g(I) = t_{-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}}(O) = I$ et $g(O) = t_{-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}}(K) = O$. g est donc la réflexion d'axe (OI) (c'est une isométrie qui fixe les deux points O et I et ce n'est pas l'identité).

b) On a immédiatement $f = t_2 \circ g$ (f est une symétrie glissée). On vérifie que $f = g \circ t_2$ (l'axe de g est dirigé par le vecteur de t_2).

Exercice n°2 (*6 points*)

1) VRAI.
Une similitude qui fixe deux points distincts conserve nécessairement les distances. La conclusion résulte alors du fait qu'une isométrie qui fixe les deux points distincts A et B est l'identité ou la réflexion d'axe (AB).

2) FAUX.
Par la relation de Chasles, l'égalité vectorielle s'écrit $\overrightarrow{MM'} = 4\overrightarrow{MG}$ soit $\overrightarrow{GM'} = -3\overrightarrow{GM}$. La transformation f est donc l'homothétie de centre G et de rapport **-3**.

Exercice n°3 (*7,5 points*)

1)

a) Par définition A_1 est le centre de gravité du triangle BCD, donc l'isobarycentre des points B, C et D. Comme $G = Bar\{(A,1),(B,1),(C,1),(D,1)\}$, on a alors, par associativité du barycentre, $G = Bar\{(A,1),(A_1,3)\}$. G est donc barycentre de A et A_1 avec des poids de même signe : $G \in [AA_1]$.
D'autre part, par définition de G, $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{0}$. La relation de Chasles conduit alors à $4\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{0}$.

b) Pour tout point M on a $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 4\overrightarrow{MG}$ (relation de Chasles) et aussi $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}$ (car I est le milieu de $[BC]$) Donc

$$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\| = 2\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| \iff 4MG = 4MI.$$

Conclusion : l'ensemble des points M cherchés est le plan médiateur du segment $[GI]$.

2) Par définition de H : $\overrightarrow{HA} = 2\overrightarrow{HG}$ donc $H = Bar\{(G,2),(A,-1)\} = Bar\{(G,4),(A,-2)\}$ (par homogénéité). L'associativité du barycentre conduit alors à

$$H = Bar\{(A,1),(B,1),(C,1),(D,1),(A,-2)\} = Bar\{(A,-1),(B,1),(C,1),(D,1)\}.$$

On a $HC^2 - HD^2 = \left(\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HD}\right).\left(\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HD}\right) = \left(\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HD}\right).\overrightarrow{DC}$. Or, ce qui précède montre que $\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HD} = \overrightarrow{HA} - \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{BA}$. Donc $HC^2 - HD^2 = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{DC}$.
Comme ACD est rectangle en A on a $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{DC} = 0$ et donc finalement $HC = HD$.