Université de Rennes

AG1 - Géométrie

Contrôle du vendredi 20 décembre 2024

Ce sujet est composé de trois exercices totalement indépendants.
La clarté et la précision des raisonnements, la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice n°1 (*10 points*)

Dans le plan orienté, on considère un losange $ABCD$ tel que $(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{3}$.

On désigne par I, J, K, L et O les milieux respectifs des segments $[AB], [BC], [CD], [DA]$ et $[BD]$.

On note Δ la médiatrice de $[AB]$ et Δ' la médiatrice de $[CD]$.

1. Soit f l'isométrie du plan définie par $f(A) = B,\ f(B) = D,\ f(D) = C$.
   (a) Prouver que f est un antidéplacement.
   (b) Démontrer que s'il existe un point M invariant par f, alors M est équidistant des points $A,\ B,\ C$ et D. L'isométrie f admet-elle un point invariant ?
2. Soit σ la symétrie orthogonale d'axe Δ et r la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.
   Démontrer que $f = r \circ \sigma$. A-t-on $f = \sigma \circ r$?
3. Soit s_1 la symétrie orthogonale d'axe (BC).
   (a) Déterminer l'axe de la symétrie orthogonale s_2 telle que $r = s_1 \circ s_2$.
   (b) En déduire que f peut s'écrire sous la forme $f = s_1 \circ t_1$, où t_1 est une translation que l'on précisera.
4. Soit t_2 la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$. On pose $g = t_2^{-1} \circ f$.
   (a) Déterminer $g(\mathrm{D}),\ g(\mathrm{I}),\ g(\mathrm{O})$. En déduire la nature précise de la transformation g.
   (b) Démontrer que $f = t_2 \circ g$. A-t-on $f = g \circ t_2$?

Exercice n°2 (*5 points*)

1) Vrai ou Faux ? (Justifier la réponse.) Une similitude du plan qui fixe deux points distincts A et B fixe tous les points de la droite (AB).

2) Vrai ou Faux ? (Justifier la réponse.) A, B et C étant trois points non alignés de l'espace, la transformation qui, à tout point M de l'espace associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ est l'homothétie de centre G, où G désigne le barycentre du système $\{(A,\ 1),\ (B,\ 1),\ (C,\ 2)\}$, et de rapport 3.

Exercice n°3 (*5 points*)

Dans un espace euclidien de dimension 3, soit $ABCD$ un tétraèdre tel que ABC, ABD et ACD soient trois triangles isocèles rectangles en A. On appelle A_1 le centre de gravité du triangle BCD.

1) On appelle G l'isobarycentre du tétraèdre ABCD et I le milieu de $[BC]$.

a) Montrer que G appartient au segment $[\mathrm{AA}_1]$ et que $4\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA}$.

b) Déterminer l'ensemble des points M tels que $\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\|$.

2) Soit H le symétrique de A par rapport à G. Écrire H comme barycentre de A, B, C et D.
Démontrer alors l'égalité $\mathrm{HC}^2 - \mathrm{HD}^2 = \overrightarrow{\mathrm{DC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BA}}$ puis que $HC = HD$.

Fin du sujet.