Feuille d'exercices d'analyse

Suites numériques

Exercice n°1

Étudier la nature des suites (u_n) définies par:

$$a)\ \ u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}; \quad b)\ \ u_n = \frac{n+(-1)^n}{n+\ln n}; \quad c)\ \ u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}\ \ pour\ \ a>0\ \ et\ \ b>0$$

$$d)\ \ u_n = \frac{n^2+\cos n}{2^n+\sin n}; \quad e)\ \ u_n = \prod_{p=2}^{n}(1-\frac{1}{p})$$

Exercice n°2

Calculer la limite des suites:

$$a)\ \ u_n = \frac{\sum_{k=1}^n (2k-1)}{\sum_{k=1}^n k}; \quad b)\ \ u_n = \frac{\sum_{k=1}^n k^2}{n^3}$$

Exercice n°3

Étudier la nature des suites (u_n) définies par:

$$a)\ \ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+p}; \quad b)\ \ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^2+p}}; \quad c)\ \ u_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} k!$$

Exercice n°4

Étudier la nature des suites (u_n) définies par:

$$a)\ \ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}; \quad b)\ \ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}; \quad c)\ \ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

Exercice n°5

Les suites (u_n) et (v_n) convergent-elles?

$$a)\ \ u_n = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1}\frac{1}{k}\ \ et\ \ v_n = u_n + \frac{1}{2n+1}; \quad b)\ \ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}\ \ et\ \ v_n = u_n + \frac{1}{n^2}$$

Exercice n°6

On définit la suite (u_n) par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$. Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes. Conclusion?

Exercice n°7

Étudier la nature des suites (u_n) définies par:

$$a)\ \ u_{n+1} = -2u_n + 1; \quad b)\ \ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 2; \quad c)\ \ u_{n+1} = iu_n + 1 - i$$

Exercice n°8

Étudier la nature des suites (u_n) définies par:

$$a)\ \ u_0 = -1,\ \ u_1 = 1,\ \ u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n; \qquad b)\ \ u_0 = 2,\ \ u_1 = 2(1+i\sqrt{3}),\ \ u_{n+2} = 2u_{n+1} - 4u_n$$

Fonctions continues

Exercice n°9

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, admettant une période strictement positive t. Montrer que si f a une limite en $+\infty$, alors f est constante.

Exercice n°10

Soit k un réel strictement positif et différent de 1. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x, $f(kx) = f(x)$. Montrer que si f est continue l'origine, elle est constante.

Exercice n°11

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On note $E = \{x \in [a, b] | f(x) = 0\}$. Montrer que si E n'est pas vide, alors $\sup E$ est un élément de E.

Exercice n°12

1) Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ continue. Montrer qu'il existe x dans $[0, 1]$ tel que $f(x) = x$.

2) Soit $f : [0, 2] \mapsto \mathbb{R}$ continue et telle que $f(0) = f(2)$. Montrer que l'équation $f(x) = f(x+1)$ a au moins une solution.

Exercice n°13

Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ continue. On suppose que f admet la même limite finie ℓ en a et b. Montrer que f n'est pas injective sur $]a, b[$.

Exercice n°14 *(d'après CAPES 1993)*

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue et ayant une limite finie ℓ en $+\infty$. Montrer que f est bornée sur $[0, +\infty[$ et atteint au moins une de ses bornes.

Exercice n°15

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue telle que pour tout $x > 0$, $|f(x)| < x$. Calculer $f(0)$. Montrer qu' tout couple (a, b) de réels vérifiant $0 < a < b$, on peut associer un nombre k de $]0, 1[$ tel que, pour tout x de $]a, b[$, $|f(x)| \leq kx$. Est-ce vrai pour les couples $(0, b)$?

Exercice n°16

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ uniformément continue.

1) Montrer que $|f|$ est uniformément continue.

2) Montrer qu'il existe un réel $\alpha_0 > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait :

$$\forall x \in [n\alpha_0, (n+1)\alpha_0],\ |f(x)| < 1 + |f(n\alpha_0)|$$

3) En déduire qu'il existe des réels a et b tels que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $|f(x)| \leq ax + b$.

4) Utiliser 3) pour étudier la continuité uniforme de $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$.

5) La condition 3) est-elle suffisante pour avoir la continuité uniforme ?

Exercice n°17

1)a) Montrer que les fonctions $f : x \mapsto e^{-x}$ et $g : x \mapsto |x|$ sont convexes sur $\mathbb{R}$.

b) Soit $h : x \mapsto e^{-|x|}$. Vérifier que $h(0) > \frac{1}{2}(h(1) + h(-1))$. h est-elle convexe sur $\mathbb{R}$?

2) Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexes. On pose $h = f \circ g$.

a) Peut-on affirmer que h est convexe sur $\mathbb{R}$?

b) On suppose en outre f croissante sur $\mathbb{R}$. Montrer que h est convexe sur $\mathbb{R}$.

Exercice n°18

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et bornée.

1) Soit a un réel quelconque. On pose $g_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

a) Montrer que g_a est croissante sur $]a, +\infty[$ (on pourra, pour $a < x < y$, écrire x sous la forme $x = ta + (1-t)y$, pour un t convenablement choisi).
Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} g_a(x) = 0$.

b) En déduire que f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(-x)$ est aussi convexe et bornée. Qu'en déduit-on pour f ?

3) Enoncer un résultat résumant cet exercice.

Fonctions dérivables - Formules de Taylor

Exercice n°19 *(CAPES 2005)*

Soient $f, g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ dérivables. Montrer que f et g ont même dérivée logarithmique si et seulement si f et g sont proportionnelles.

Exercice n°20

Soit $f : [-1, +1] \to \mathbb{R}$ dérivable en 0. On définit la suite (u_n) par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) - nf(0)$. Montrer que cette suite converge vers $\frac{1}{2}f'(0)$.

Exercice n°21

Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue qui ne s'annule pas sur $]a, b[$. Montrer que si la fonction carrée f^2 est dérivable, il en est de même de f.

Exercice n°22

1) Soit $\alpha > 0$. A l'aide du théorème des accroissements finis appliqué à $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$, montrer que pour tout n de $\mathbb{N} - \{0, 1\}$,

$$\frac{1}{n^{1+\alpha}} < \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{(n-1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha}\right)$$

2) En déduire que la suite donnée par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ converge pour $\alpha > 1$.

Exercice n°23

Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f(-1) = f(1) = 0$.
Montrer que, pour tout α de $]-1,1[$, il existe un polynôme P de degré ≤ 2 tel que la fonction $g = f + P$ s'annule en -1, 1 et α. En déduire que $f(\alpha) = \frac{\alpha^2-1}{2} f"(c)$ o $c \in]-1,1[$, puis que :

$$\sup_{x\in[-1,1]} |f(x)| \leq \frac{1}{2} \sup_{x\in[-1,1]} |f"(x)|$$

Exercice n°24 *(d'après CAPES 2002)*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = xf'(\frac{x}{2})$.

1) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

2) On suppose en outre f de classe C^n ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$). En utilisant la formule de Taylor-Young, montrer que, pour tout entier p compris entre 1 et n, on a : $f^{(p)}(0) = 0$ ou $p2^{1-p} = 1$.

Exercice n°25

Soit f une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$, de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On suppose que $f(0) = f'(0) = 0$. On pose $g(x) = \begin{cases} f(\sqrt{x}) & \text{si } x \geq 0 \\ f(-\sqrt{-x}) & \text{si } x < 0 \end{cases}$

1) Vérifier que g est de classe C^1 sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

2) Vérifier que g est continue sur $\mathbb{R}$.

3) Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g'(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} g'(x)$.

4) Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur $f''(0)$, pour que g soit de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice n°26 *(CAPES 2000)*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $L_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(t^2-1)^n$. Montrer que $L_n(1) = 2^n n!$ et calculer $L_n(-1)$.

Exercice n°27 *(CAPES 1991)*

Soit f une fonction positive, de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et telle que f'' soit bornée sur $\mathbb{R}$.

1) On note $M = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|$.

- **a)** Montrer, en appliquant la formule de Taylor avec reste de Lagrange à la fonction f que, pour tout couple de réels (x, λ) on a : $f(x) + \lambda f'(x) + \dfrac{\lambda^2}{2} M \geq 0$
- **b)** En déduire que pour tout réel x on a : $|f'(x)| \leq \sqrt{2M.f(x)}$

2) Soit x_0 un réel tel que $f(x_0) = 0$. On pose $g = \sqrt{f}$.

- **a)** Montrer que pour tout réel x, $x \neq x_0$, il existe un réel c compris entre x_0 et x tel que : $f(x) = \frac{1}{2}(x-x_0)^2 f''(c)$ (on pourra commencer par remarquer que $f'(x_0) = 0$).
- **b)** En déduire que si $f''(x_0) > 0$, g n'est pas dérivable en x_0.

Exercice n°28

1) Soient f une fonction convexe et dérivable sur un intervalle I et $a, x \in I$.
Montrer que $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$. Quelle interprétation géométrique peut-on donner de cette inégalité ?

2) Soit $x > 0$. On pose $f(x) = \dfrac{1}{x}$. On rappelle que par définition $\ell n\,(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)dt$. En utilisant la convexité de f sur $[1,2]$, majorer $\ell n\,(2)$ par la surface d'un trapèze. En appliquant le 1) à la fonction f, pour $a = 2$, minorer $\ell n\,(3)$ par la surface d'un trapèze. En déduire que $e \in]2,3[$. (e est défini par $\ell n\,(e) = 1$)

Exercice n°29

Pour $x \neq 0$, on pose $f(x) = 6\dfrac{x - \sin x}{x^3}$.

1) Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0.

2) Montrer que : $\forall x \neq 0,\ \exists \theta \in]0,1[,\ f(x) = \cos(\theta x)$.

3) Montrer que, en travaillant pour x suffisamment petit (c'est à dire pour x inférieur à un certain x_0), on peut assurer l'unicité du θ précédent. Prouver que $\lim\limits_{x\to 0} \theta = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Exercice n°30

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 ; on suppose que φ et φ" sont bornées sur $\mathbb{R}$ et on pose :

$$M_0 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)| \quad \text{et} \quad M_2 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi"(x)|$$

Montrer que pour tout réel x et tout réel $a > 0$, $|\varphi'(x)| \leq \dfrac{M_0}{a} + \dfrac{aM_2}{2}$.
En déduire que φ' est bornée sur $\mathbb{R}$ et que : $M_1 = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |\varphi'(x)| \leq \sqrt{2M_0M_2}$.

Exercice n°31

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^3. Pour k dans $\{0,1,2,3\}$, on note $M_k = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left|f^{(k)}(x)\right|$. On suppose que M_0 et M_3 sont finis.

1) Soient x un réel et $h > 0$.

a) Ecrire les formules de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 au voisinage de x d'une part pour un accroissement $+h$ et d'autre part pour un accroissement $-h$.

b) Résoudre le système linéaire d'inconnues $f'(x)$ et $f''(x)$ ainsi obtenu et en déduire :

$$|f'(x)| \leq \frac{M_0}{h} + h^2\frac{M_3}{6}$$

$$|f''(x)| \leq \frac{4M_0}{h^2} + h\frac{M_3}{3}$$

2) Montrer que M_1 et M_2 sont finis.

3) En déduire l'existence de constantes C_1 et C_2 (que l'on déterminera) telles que :

$$M_1 \leq C_1\sqrt[3]{M_0^2.M_3} \qquad \text{et} \qquad M_2 \leq C_2\sqrt[3]{M_0.M_3^2}$$

Exercice n°32

On pose $v_n = 2^n \sin\dfrac{\pi}{2^n}$, pour $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que $|\pi - v_n| \leq \dfrac{\pi^3}{6 \times 4^n}$ (on pourra utiliser la formule de Taylor-Lagrange pour sinus en 0).

2) Montrer de même que $|\pi - v_n - \dfrac{\pi^3}{6 \times 4^n}| \leq \dfrac{\pi^5}{120 \times 4^{2n}}$.

3) Soit λ un nombre réel. On pose $w_n = \lambda v_{n+1} + (1-\lambda)v_n$. Déterminer le réel λ pour que l'on ait, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|\pi - w_n| \leq \dfrac{K}{4^{2n}}$, o K est une constante, que l'on précisera.

Théorème du point fixe - Suites récurrentes

Exercice n°33

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose qu'il existe $k \in]0,1[$ telle que, pour tout x : $|f'(x)| \leq k$. Montrer que f a un unique point fixe (on montrera que $g : x \mapsto f(x) - x$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$). Vérifier que $h : x \mapsto 1 + \ell n\,(\text{ch } x)$ vérifie $|h'(x)| < 1$ sur $\mathbb{R}$ mais que h n'a pas de point fixe.

Exercice n°34

Etudier les suites récurrentes définies par

1) $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{u_n}$.

2) $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = -u_n^2 + 2u_n$.

3) $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n^2}$.

4) $u_0 \in [0,1]$ et $u_{n+1} = 1 - u_n^2$.

Exercice n°35 *(CAPES 1995)*

On définit deux suites (a_n) et (b_n) par $a_0 = a \geq 0$, $b_0 = b \geq 0$ $(b \neq a)$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n + b_n)$ et $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$.

1) Montrer que (b_n) est croissante, (a_n) décroissante, et que pour tout $n \geq 1$ on a $b_n < a_n$.

2) Montrer que (a_n) et (b_n) sont deux suites adjacentes.

3) Que se passe-t-il si $a = b$?

Exercice n°36 *(d'après CAPES 1998)*

Etudier les suites récurrentes définies par $u_0 \in]0,2[$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(4 - u_n^2)$ (point fixe unique mais répulsif).

Exercice n°37

1) Soit g la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $g(x) = x - 2 - \ell n\, x$. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution dans l'intervalle $[3,4]$. Dans toute la suite, on appelle ℓ cette solution.

2) Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = 2 + \ell n\, x$. Montrer que la donnée $u_0 = 3$ et la relation

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2 + \ell n\,(u_n)$$

définissent bien une suite de nombres réels. Montrer que pour tout entier n, $3 \leq u_n \leq 4$.

3) Montrer que pour tout entier n,

$$\frac{|u_0 - \ell|}{4^n} \leq |u_n - \ell| \leq \frac{|u_0 - \ell|}{3^n}$$

(on pourra utiliser le théorème des accroissements finis). Quelle est la limite de la suite (u_n) ?
Dans la suite de l'exercice, on applique la méthode de Newton pour la résolution de l'équation $g(x) = 0$, ce qui conduit à considérer la fonction Φ définie pour $x > 1$ par

$$\Phi(x) = \frac{x(1 + \ell n\, x)}{x - 1}$$

4) Montrer que $\Phi(\ell) = \ell$. Calculer $\Phi'(x)$ et montrer que $\Phi'(\ell) = 0$. Etudier les variations de Φ.

5) Montrer que la donnée $v_0 = 4$ et la relation

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \Phi(v_n)$$

définissent bien une suite de nombres réels. Montrer que pour tout entier n, $v_n \leq 4$, et que la suite (v_n) converge vers ℓ.

6) Calculer $\Phi''(x)$. En écrivant $\Phi''(x)$ sous la forme $\dfrac{A(x)}{x(x-1)^3}$, à l'aide de majorations très simples, montrer que pour tout x de l'intervalle $[3, 4]$, $|\Phi''(x)| \leq 2$.

7) Soit $v > \ell$ un nombre réel. Ecrire la formule de Taylor-Lagrange, à l'ordre 1, pour la fonction Φ entre ℓ et v. En déduire que pour tout entier n, $|v_{n+1} - \ell| \leq |v_n - \ell|^2$.

Séries numériques

Exercice n°38

Etudier la nature des séries de terme général:

$$\frac{\ln n}{n^2},\quad \frac{n}{\ln(e^n - 1)},\quad \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n},\quad \frac{n^n}{4^n.n!},\quad \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n},\quad e^{-n^2}\ln n.$$

Exercice n°39

Montrer la convergence et calculer la somme des séries:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)},\quad \sum_{n=2}^{\infty} \ln(1 + \frac{(-1)^n}{n}),\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}.$$

Exercice n°40

Soient $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.
Étudier la nature des séries (u_n) et (v_n).

Exercice n°41

Soient (u_n) et (v_n) deux séries à termes positifs telles que : $\forall n \geq N, \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.

1) Montrer que si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.

2) En déduire la convergence de la série de terme général $u_n = \dfrac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n+2)}$ (on prendra $v_n = n^{-\alpha}$ avec $1 < \alpha < 3/2$ et on utilisera le DL à l'ordre 1 de $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} - \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$).

Exercice n°42

1) Soient (a_n) une suite de réels et (b_n) une suite de complexes. On suppose que:

- la suite (a_n) est décroissante et converge vers 0,
- il existe une constante $K > 0$ telle que pour tous entiers naturels $n \leq m$ on ait $\left|\sum_{p=n}^{m} b_p\right| \leq K$,

Montrer que la série $\sum a_n b_n$ est convergente.

2) Etudier la nature des séries de terme général:

$$\frac{\cos n}{n^2}, \quad \frac{\cos n}{n}, \quad \frac{\cos^2 n}{n}, \quad \frac{e^{in\alpha}}{n} \quad \textit{avec} \quad \alpha \in [0, 2\pi].$$

Intégrales

Exercice n°43

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un réel $k > 0$ tel que $\forall x, y \in [0,1]$, $|f(x) - f(y)| \leq k\,|x - y|$. On pose $\alpha_n = \int_0^1 f(t)\,dt - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n})$. Montrer que $|\alpha_n| \leq \frac{k}{2n}$.

Exercice n°44

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ avec $a \leq b$ à valeurs réelles telles que, pour tout $x \in [a,b]$, on ait $f(x)g(x) \geq 1$. Montrer que $\int_a^b f(x)\,dx \int_a^b g(x)\,dx \geq (b-a)^2$.

Exercice n°45 *(CAPES 1994)*

Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = \sum_{k=0}^{[x]} \frac{\sqrt{x^2 - k^2}}{x^2}$.

Montrer que $f(x)$ admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. Calculer cette limite.

Exercice n°46

Nature et calcul éventuel des intégrales suivantes:

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}dx, \qquad \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Exercice n°47 *(CAPES 1993)*

Montrer que pour tout $x > 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t \sin t}{x^2 + t^2}\,dt$ converge (on pourra effectuer une intégration par parties).

Exercice n°48 *(CAPES 1991)*

1) Soient $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continues et telles que $\int_0^{+\infty} f^2$ et $\int_0^{+\infty} g^2$ convergent.

Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} fg$ converge absolument.

2) Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue et admettant une limite ℓ (finie ou non) en $+\infty$. Montrer que si $\int_0^{+\infty} f$ converge alors $\ell = 0$.

Exercice n°49

1) Montrer que l'intégrale $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ converge pour $\alpha \in]0, \infty[$.

2) Etablir une relation de récurrence entre $\Gamma(\alpha)$ et $\Gamma(\alpha+1)$. En déduire $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice n°50

Comparer la convergence des intégrales $\int_1^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$ et $\int_1^\infty \ln(1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}})dx$.

Exercice n°51

Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1}(-1)^n\dfrac{n+x^2}{n^2}$ ne converge absolument en aucun x réel mais que cette série converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$.

Exercice n°52

Soit $\zeta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^x}$. On définit ainsi la fonction Zeta de Riemann.

1) Quel est le domaine de définition de la fonction ζ ?

2) Montrer que ζ est strictement décroissante et convexe. En déduire que $\lim_{x\to 1^+}\zeta(x)=+\infty$.

3) Montrer que pour tout $x\geq 2$ et tout $N\geq 1$ on a : $1\leq\zeta(x)\leq\sum_{n=1}^{N}\dfrac{1}{n^x}+\sum_{n\geq N+1}\dfrac{1}{n^2}$.

En déduire que $\lim_{x\to+\infty}\zeta(x)=1$.

4) Montrer que ζ est de classe C^∞ et que $\forall p\in\mathbb{N}^*$, $\forall x>1$, $\zeta^{(p)}(x)=\sum_{n\geq 2}\dfrac{(-\ell n\, n)^p}{n^x}$.

Retrouver ainsi le résultat de la question 2).

5) Pour $n\geq 2$ et $x>0$, montrer les inégalités $\int_n^{n+1}t^{-x}\,dt\leq n^{-x}\leq\int_{n-1}^{n}t^{-x}\,dt$.

6) En déduire que pour $x>1$ et $N\geq 2$ on a : $\dfrac{N^{1-x}}{x-1}\leq\sum_{n\geq N}\dfrac{1}{n^x}\leq\dfrac{(N-1)^{1-x}}{x-1}$.

7) Montrer que $\zeta(x)-1\underset{x\to+\infty}{\sim}2^{-x}$ et que $\zeta(x)\underset{x\to 1}{\sim}\dfrac{1}{x-1}$.

Exercice n°53 *(CAPES 1997)*

Pour tout entier $k\geq 1$, on pose $f_k:x>0\longmapsto\dfrac{1}{k^{x+1}}$.

1) Montrer que pour tout entier $r\geq 1$, la série de fonctions $\left[f_k^{(r)}\right]$ converge normalement sur tout intervalle $[\alpha,+\infty[$ $(\alpha>0)$.

2) En déduire que la fonction $S:x>0\longmapsto\sum_{k\geq 1}\dfrac{1}{k^{x+1}}$ est de classe C^∞.

3) Montrer que S est décroissante et convexe.

Exercice n°54

Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ bornée.

1) Montrer que la série $\sum t^n f(t)$ est uniformément convergente sur tout intervalle $[0,a]$ où $0<a<1$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que cette série converge simplement sur $[0,1]$.

2) Montrer que la convergence de cette série de fonctions est uniforme sur $[0,1]$ si et seulement si f est dérivable en 1 et $f(1)=f'(1)=0$.

Séries entières - Séries de Fourier

Exercice n°55 *(CAPES 2002)*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ développable en série entière au voisinage de 0 : $\forall x \in]-R, R[,\ f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

Montrer que si f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = xf'(\frac{x}{2})$ alors f est polynômiale sur $\mathbb{R}$.

Exercice n°56 *(d'après CAPES 1996)*

Montrer que l'équation différentielle $-t^2y''(t) - 2ty'(t) + y(t) = \text{Arctan}\, t$ admet une solution développable en série entière au voisinage de 0. Donner une valeur approchée en $\dfrac{1}{3}$ à 10^{-5} près de la solution trouvée.

Exercice n°57 *(CAPES 1997)*

Pour $x \neq 0$ fixé, on considère la fonction f 2π-périodique définie sur $]-\pi, \pi]$ par $f(t) = \text{ch}\, xt$.

1) Montrer que f est paire, continue et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$.

2) Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de f.

3) Montrer que f est somme de sa série de Fourier et en déduire que $\pi\text{coth}(\pi x) - \dfrac{1}{x} = \displaystyle\sum_{n\geq 1} \dfrac{2x}{x^2+n^2}$.

Exercice n°58

Soit λ un réel non nul de $]-1, 1[$. Pour tout réel x, on pose $f(x) = \dfrac{1}{1 - 2\lambda\cos x + \lambda^2}$.

1) Montrer que la série de Fourier de f converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$. Ecrire l'égalité qui en résulte, sans chercher à calculer les $a_n(f)$ (qu'on notera simplement a_n).

2) (a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $\lambda a_{n+1} - (1+\lambda^2)a_n + \lambda a_{n-1} = 0$.
(b) En déduire l'existence de deux réels α et β tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \alpha\lambda^n + \frac{\beta}{\lambda^n}$.
(c) Montrer que $\beta = 0$. Calculer a_0 et en déduire l'expression de a_n.

3) Déduire de ce qui précède que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in]-1, 1[,\ \dfrac{1-\lambda^2}{1 - 2\lambda\cos x + \lambda^2} = 1 + 2\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n \cos nx$.

4) Retrouver ce résultat en utilisant un développement en série entière.