Feuille d'exercices d'analyse

Fonctions continues

Exercice n°1

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, admettant une période strictement positive t. Montrer que si f a une limite en $+\infty$, alors f est constante.

Exercice n°2

Soit k un réel strictement positif et différent de 1. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x, $f(kx) = f(x)$. Montrer que si f est continue à l'origine, elle est constante.

Exercice n°3

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On note $E = \{x \in [a, b] | f(x) = 0\}$. Montrer que si E n'est pas vide, alors $\sup E$ est un élément de E.

Exercice n°4

1) Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ continue. Montrer qu'il existe x dans $[0, 1]$ tel que $f(x) = x$.

2) Soit $f : [0, 2] \mapsto \mathbb{R}$ continue et telle que $f(0) = f(2)$. Montrer que l'équation $f(x) = f(x+1)$ a au moins une solution.

Exercice n°5

Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ continue. On suppose que f admet la même limite finie ℓ en a et b. Montrer que f n'est pas injective sur $]a, b[$.

Exercice n°6 *(d'après CAPES 1993)*

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue et ayant une limite finie ℓ en $+\infty$. Montrer que f est bornée sur $[0, +\infty[$ et atteint au moins une de ses bornes.

Exercice n°7

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue telle que pour tout $x > 0$, $|f(x)| < x$. Calculer $f(0)$. Montrer qu'à tout couple (a, b) de réels vérifiant $0 < a < b$, on peut associer un nombre k de $]0, 1[$ tel que, pour tout x de $]a, b[$, $|f(x)| \leq kx$. Est-ce vrai pour les couples $(0, b)$?

Exercice n°8

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ uniformément continue.

1) Montrer que $|f|$ est uniformément continue.

2) Montrer qu'il existe un réel $\alpha_0 > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait :

$$\forall x \in [n\alpha_0, (n+1)\alpha_0],\ |f(x)| < 1 + |f(n\alpha_0)|$$

3) En déduire qu'il existe des réels a et b tels que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $|f(x)| \leq ax + b$.

4) Utiliser 3) pour étudier la continuité uniforme de $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$.

5) La condition 3) est-elle suffisante pour avoir la continuité uniforme ?

Exercice n°9

1)a) Montrer que les fonctions $f : x \mapsto e^{-x}$ et $g : x \mapsto |x|$ sont convexes sur $\mathbb{R}$.

b) Soit $h : x \mapsto e^{-|x|}$. Vérifier que $h(0) > \frac{1}{2}(h(1) + h(-1))$. h est-elle convexe sur $\mathbb{R}$?

2) Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexes. On pose $h = f \circ g$.

a) Peut-on affirmer que h est convexe sur $\mathbb{R}$?

b) On suppose en outre f croissante sur $\mathbb{R}$. Montrer que h est convexe sur $\mathbb{R}$.

Exercice n°10

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et bornée.

1) Soit a un réel quelconque. On pose $g_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

a) Montrer que g_a est croissante sur $]a, +\infty[$ (on pourra, pour $a < x < y$, écrire x sous la forme $x = ta+(1-t)y$, pour un t convenablement choisi).
Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} g_a(x) = 0$.

b) En déduire que f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(-x)$ est aussi convexe et bornée. Qu'en déduit-on pour f ?

3) Enoncer un résultat résumant cet exercice.

Fonctions dérivables - Formules de Taylor

Exercice n°11 *(CAPES 2005)*

Soient $f, g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ dérivables. Montrer que f et g ont même dérivée logarithmique si et seulement si f et g sont proportionnelles.

Exercice n°12

Soit $f : [-1, +1] \to \mathbb{R}$ dérivable en 0. On définit la suite (u_n) par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) - nf(0)$. Montrer que cette suite converge vers $\frac{1}{2}f'(0)$.

Exercice n°13

Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue qui ne s'annule pas sur $]a, b[$. Montrer que si la fonction carrée f^2 est dérivable, il en est de même de f.

Exercice n°14

1) Soit $\alpha > 0$. A l'aide du théorème des accroissements finis appliqué à $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$, montrer que pour tout n de $\mathbb{N} - \{0, 1\}$,

$$\frac{1}{n^{1+\alpha}} < \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{(n-1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha}\right)$$

2) En déduire que la suite donnée par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ converge pour $\alpha > 1$.

Exercice n°15

Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f(-1) = f(1) = 0$.
Montrer que, pour tout α de $]-1, 1[$, il existe un polynôme P de degré ≤ 2 tel que la fonction $g = f + P$ s'annule en -1, 1 et α. En déduire que $f(\alpha) = \frac{\alpha^2-1}{2} f"(c)$ où $c \in]-1, 1[$, puis que :

$$\sup_{x \in [-1,1]} |f(x)| \leq \frac{1}{2} \sup_{x \in [-1,1]} |f"(x)|$$

Exercice n°16 *(d'après CAPES 2002)*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = xf'(\frac{x}{2})$.

1) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

2) On suppose en outre f de classe C^n ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$). En utilisant la formule de Taylor-Young, montrer que, pour tout entier p compris entre 1 et n, on a : $f^{(p)}(0) = 0$ ou $p2^{1-p} = 1$.

Exercice n°17

Soit f une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$, de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On suppose que $f(0) = f'(0) = 0$. On pose
$g(x) = \begin{cases} f(\sqrt{x}) & \text{si } x \geq 0 \\ f(-\sqrt{-x}) & \text{si } x < 0 \end{cases}$

1) Vérifier que g est de classe C^1 sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

2) Vérifier que g est continue sur $\mathbb{R}$.

3) Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} g'(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} g'(x)$.

4) Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur $f''(0)$, pour que g soit de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice n°18 *(CAPES 2000)*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $L_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(t^2-1)^n$. Montrer que $L_n(1) = 2^n n!$ et calculer $L_n(-1)$.

Exercice n°19 *(CAPES 1991)*

Soit f une fonction positive, de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et telle que f'' soit bornée sur $\mathbb{R}$.

1) On note $M = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)|$.

a) Montrer, en appliquant la formule de Taylor avec reste de Lagrange à la fonction f que, pour tout couple de réels (x, λ) on a : $f(x) + \lambda f'(x) + \dfrac{\lambda^2}{2}M \geq 0$

b) En déduire que pour tout réel x on a : $|f'(x)| \leq \sqrt{2M.f(x)}$

2) Soit x_0 un réel tel que $f(x_0) = 0$. On pose $g = \sqrt{f}$.

a) Montrer que pour tout réel x, $x \neq x_0$, il existe un réel c compris entre x_0 et x tel que :
$f(x) = \frac{1}{2}(x-x_0)^2 f''(c)$ (on pourra commencer par remarquer que $f'(x_0) = 0$).

b) En déduire que si $f''(x_0) > 0$, g n'est pas dérivable en x_0.

Exercice n°20

1) Soient f une fonction convexe et dérivable sur un intervalle I et $a, x \in I$.
Montrer que $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$. Quelle interprétation géométrique peut-on donner de cette inégalité ?

2) Soit $x > 0$. On pose $f(x) = \dfrac{1}{x}$. On rappelle que par définition $\ell n\,(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)dt$. En utilisant la convexité de f sur $[1, 2]$, majorer $\ell n\,(2)$ par la surface d'un trapèze. En appliquant le 1) à la fonction f, pour $a = 2$, minorer $\ell n\,(3)$ par la surface d'un trapèze. En déduire que $e \in]2, 3[$. (e est défini par $\ell n\,(e) = 1$)

Exercice n°21

Pour $x \neq 0$, on pose $f(x) = 6\dfrac{x - \sin x}{x^3}$.

1) Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0.

2) Montrer que : $\forall x \neq 0$, $\exists \theta \in]0, 1[$, $f(x) = \cos(\theta x)$.

3) Montrer que, en travaillant pour x suffisamment petit (c'est à dire pour x inférieur à un certain x_0), on peut assurer l'unicité du θ précédent. Prouver que $\lim\limits_{x\to 0} \theta = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Exercice n°22

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 ; on suppose que φ et φ" sont bornées sur $\mathbb{R}$ et on pose :

$$M_0 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)| \quad \text{et} \quad M_2 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi"(x)|$$

Montrer que pour tout réel x et tout réel $a > 0$, $|\varphi'(x)| \leq \dfrac{M_0}{a} + \dfrac{aM_2}{2}$.
En déduire que φ' est bornée sur $\mathbb{R}$ et que : $M_1 = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |\varphi'(x)| \leq \sqrt{2M_0M_2}$.

Exercice n°23

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^3. Pour k dans $\{0, 1, 2, 3\}$, on note $M_k = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left|f^{(k)}(x)\right|$. On suppose que M_0 et M_3 sont finis.

1) Soient x un réel et $h > 0$.

a) Ecrire les formules de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 au voisinage de x d'une part pour un accroissement $+h$ et d'autre part pour un accroissement $-h$.

b) Résoudre le système linéaire d'inconnues $f'(x)$ et $f''(x)$ ainsi obtenu et en déduire :

$$|f'(x)| \leq \frac{M_0}{h} + h^2\frac{M_3}{6}$$

$$|f''(x)| \leq \frac{4M_0}{h^2} + h\frac{M_3}{3}$$

2) Montrer que M_1 et M_2 sont finis.

3) En déduire l'existence de constantes C_1 et C_2 (que l'on déterminera) telles que :

$$M_1 \leq C_1\sqrt[3]{M_0^2.M_3} \qquad \text{et} \qquad M_2 \leq C_2\sqrt[3]{M_0.M_3^2}$$

Exercice n°24

On pose $v_n = 2^n \sin\dfrac{\pi}{2^n}$, pour $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que $|\pi - v_n| \leq \dfrac{\pi^3}{6 \times 4^n}$ (on pourra utiliser la formule de Taylor-Lagrange pour sinus en 0).

2) Montrer de même que $|\pi - v_n - \dfrac{\pi^3}{6\times 4^n}| \leq \dfrac{\pi^5}{120 \times 4^{2n}}$.

3) Soit λ un nombre réel. On pose $w_n = \lambda v_{n+1} + (1 - \lambda)v_n$. Déterminer le réel λ pour que l'on ait, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|\pi - w_n| \leq \dfrac{K}{4^{2n}}$, où K est une constante, que l'on précisera.

Théorème du point fixe - Suites récurrentes

Exercice n°25

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose qu'il existe $k \in]0, 1[$ telle que, pour tout x : $|f'(x)| \leq k$. Montrer que f a un unique point fixe (on montrera que $g : x \mapsto f(x) - x$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$). Vérifier que $h : x \mapsto 1 + \ell n\,(\text{ch } x)$ vérifie $|h'(x)| < 1$ sur $\mathbb{R}$ mais que h n'a pas de point fixe.

Exercice n°26 *(CAPES 1995)*
On définit deux suites (a_n) et (b_n) par $a_0 = a \geq 0$, $b_0 = b \geq 0$ $(b \neq a)$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n + b_n)$ et $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$.

1) Montrer que (b_n) est croissante, (a_n) décroissante, et que pour tout $n \geq 1$ on a $b_n < a_n$.

2) Montrer que (a_n) et (b_n) sont deux suites adjacentes.

3) Que se passe-t-il si $a = b$?

Exercice n°27 *(d'après CAPES 1998)*
Etudier les suites récurrentes définies par $u_0 \in]0, 2[$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(4 - u_n^2)$ (point fixe unique mais répulsif).

Exercice n°28

1) Soit g la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $g(x) = x - 2 - \ell n\, x$. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution dans l'intervalle $[3, 4]$. Dans toute la suite, on appelle ℓ cette solution.

2) Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = 2 + \ell n\, x$. Montrer que la donnée $u_0 = 3$ et la relation

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2 + \ell n\,(u_n)$$

définissent bien une suite de nombres réels. Montrer que pour tout entier n, $3 \leq u_n \leq 4$.

3) Montrer que pour tout entier n,

$$\frac{|u_0 - \ell|}{4^n} \leq |u_n - \ell| \leq \frac{|u_0 - \ell|}{3^n}$$

(on pourra utiliser le théorème des accroissements finis). Quelle est la limite de la suite (u_n) ?
Dans la suite de l'exercice, on applique la méthode de Newton pour la résolution de l'équation $g(x) = 0$, ce qui conduit à considérer la fonction Φ définie pour $x > 1$ par

$$\Phi(x) = \frac{x(1 + \ell n\, x)}{x - 1}$$

4) Montrer que $\Phi(\ell) = \ell$. Calculer $\Phi'(x)$ et montrer que $\Phi'(\ell) = 0$. Etudier les variations de Φ.

5) Montrer que la donnée $v_0 = 4$ et la relation

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \Phi(v_n)$$

définissent bien une suite de nombres réels. Montrer que pour tout entier n, $v_n \leq 4$, et que la suite (v_n) converge vers ℓ.

6) Calculer $\Phi''(x)$. En écrivant $\Phi''(x)$ sous la forme $\dfrac{A(x)}{x(x-1)^3}$, à l'aide de majorations très simples, montrer que pour tout x de l'intervalle $[3, 4]$, $|\Phi''(x)| \leq 2$.

7) Soit $v > \ell$ un nombre réel. Ecrire la formule de Taylor-Lagrange, à l'ordre 1, pour la fonction Φ entre ℓ et v. En déduire que pour tout entier n, $|v_{n+1} - \ell| \leq |v_n - \ell|^2$.

Séries numériques

Exercice n°29
Soient $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.
Étudier la nature des séries (u_n) et (v_n).

Exercice n°30

Soient (u_n) et (v_n) deux séries à termes positifs telles que : $\forall n \geq N, \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.

1) Montrer que si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.

2) En déduire la convergence de la série de terme général $u_n = \dfrac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n+2)}$ (on prendra $v_n = n^{-\alpha}$ avec $1 < \alpha < 3/2$ et on utilisera le DL à l'ordre 1 de $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} - \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$).

Exercice n°31

Soient (a_n) une suite de réels et (b_n) une suite de complexes. On suppose que:

- la suite (a_n) est décroissante et converge vers 0,
- il existe une constante $K > 0$ telle que pour tous entiers naturels $n \leq m$ on ait $\left|\sum_{p=n}^{m} b_p\right| \leq K$,

Montrer que la série $\sum a_n b_n$ est convergente.

Intégrales

Exercice n°32

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un réel $k > 0$ tel que $\forall x, y \in [0,1]$, $|f(x) - f(y)| \leq k\,|x - y|$. On pose $\alpha_n = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n})$. Montrer que $|\alpha_n| \leq \frac{k}{2n}$.

Exercice n°33

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ avec $a \leq b$ à valeurs réelles telles que, pour tout $x \in [a,b]$, on ait $f(x)g(x) \geq 1$. Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \int_a^b g(x)\,dx \geq (b-a)^2$.

Exercice n°34 *(CAPES 1994)*

Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{[x]} \frac{\sqrt{x^2 - k^2}}{x^2}$.

Montrer que $f(x)$ admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. Calculer cette limite.

Exercice n°35 *(CAPES 1993)*

Montrer que pour tout $x > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t \sin t}{x^2 + t^2}\,dt$ converge (on pourra effectuer une intégration par parties).

Exercice n°36 *(CAPES 1991)*

1) Soient $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continues et telles que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} g^2$ convergent.

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} fg$ converge absolument.

2) Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue et admettant une limite ℓ (finie ou non) en $+\infty$. Montrer que si $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge alors $\ell = 0$.

Suites et séries de fonctions - Séries entières

Exercice n°37

Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1}(-1)^n \dfrac{n+x^2}{n^2}$ ne converge absolument en aucun x réel mais que cette série converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$.

Exercice n°38

Soit $\zeta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^x}$. On définit ainsi la fonction Zeta de Riemann.

1) Quel est le domaine de définition de la fonction ζ ?

2) Montrer que ζ est strictement décroissante et convexe. En déduire que $\lim_{x\to 1^+} \zeta(x) = +\infty$.

3) Montrer que pour tout $x \geq 2$ et tout $N \geq 1$ on a : $1 \leq \zeta(x) \leq \sum_{n=1}^{N} \dfrac{1}{n^x} + \sum_{n\geq N+1} \dfrac{1}{n^2}$.

En déduire que $\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1$.

4) Montrer que ζ est de classe C^∞ et que $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\forall x > 1$, $\zeta^{(p)}(x) = \sum_{n\geq 2} \dfrac{(-\ell n\, n)^p}{n^x}$.

Retrouver ainsi le résultat de la question 2).

5) Pour $n \geq 2$ et $x > 0$, montrer les inégalités $\int_n^{n+1} t^{-x}\, dt \leq n^{-x} \leq \int_{n-1}^{n} t^{-x}\, dt$.

6) En déduire que pour $x > 1$ et $N \geq 2$ on a : $\dfrac{N^{1-x}}{x-1} \leq \sum_{n\geq N} \dfrac{1}{n^x} \leq \dfrac{(N-1)^{1-x}}{x-1}$.

7) Montrer que $\zeta(x) - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} 2^{-x}$ et que $\zeta(x) \underset{x\to 1}{\sim} \dfrac{1}{x-1}$.

Exercice n°39 *(CAPES 1997)*

Pour tout entier $k \geq 1$, on pose $f_k : x > 0 \longmapsto \dfrac{1}{k^{x+1}}$.

1) Montrer que pour tout entier $r \geq 1$, la série de fonctions $\left[f_k^{(r)}\right]$ converge normalement sur tout intervalle $[\alpha, +\infty[$ $(\alpha > 0)$.

2) En déduire que la fonction $S : x > 0 \longmapsto \sum_{k\geq 1} \dfrac{1}{k^{x+1}}$ est de classe C^∞.

3) Montrer que S est décroissante et convexe.

Exercice n°40

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ bornée.

1) Montrer que la série $\sum t^n f(t)$ est uniformément convergente sur tout intervalle $[0,a]$ où $0 < a < 1$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que cette série converge simplement sur $[0,1]$.

2) Montrer que la convergence de cette série de fonctions est uniforme sur $[0,1]$ si et seulement si f est dérivable en 1 et $f(1) = f'(1) = 0$.