Feuille d'exercices d'algèbre

Relations binaires, lois de composition, applications

Exercice n°1

Soient E un ensemble et $A \subset E$. On définit la relation sur $\mathcal{P}(E)$: $X \sim Y \Leftrightarrow X \cup A = Y \cup A$.

1) Montrer que c'est une relation d'équivalence.

2) Soit $\varphi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E \setminus A)$, $X \mapsto X \setminus A$.
Montrer que φ est compatible avec $\sim$, et que l'application quotient associée est une bijection.

Exercice n°2

On définit dans le corps $\mathbb{C}$, la relation $\mathcal{R}$ par : $(x+iy)\mathcal{R}(x'+iy')$ si $(x < x')$ ou $(x = x'$ et $y \leq y')$. Montrer que c'est une relation d'ordre total, non compatible avec la multiplication. Déterminer l'ensemble des majorants de $U = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$. L'ensemble U admet-il une borne supérieure ?

Exercice n°3

On définit sur $\mathbb{N}$ la relation $\mathcal{R}$ suivante : $a \mathcal{R} b$ si, pour tout nombre premier p, p est diviseur de a si et seulement si p est diviseur de b.

1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et que toute classe d'équivalence a un plus petit élément pour l'ordre usuel.

2) Soit C une classe d'équivalence. Si x et y sont des éléments de C, montrer que $xy \in C$.

3) Montrer qu'il y a une infinité de classes d'équivalence. Y-en a-t-il ayant un plus grand élément ?

Exercice n°4 *(Deuxième épreuve 2007)*

Une relation d'ordre $\preceq$ sur $\mathbb{R}^n$ est dite compatible avec la structure d'espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ si elle vérifie les deux conditions suivantes : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $x \preceq y \Rightarrow x + z \preceq y + z$ et $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}^+$, $x \preceq y \Rightarrow \lambda x \preceq \lambda y$.

1) Soit $\preceq$ une relation d'ordre total sur R^n compatible avec la structure d'espace vectoriel.

a) Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}^-$, $x \preceq y \Rightarrow \lambda y \preceq \lambda x$.

b) Soit $\varphi \in GL(\mathbb{R}^n)$ (le groupe linéaire de $\mathbb{R}^n$). On définit une relation $\preceq'$ par : pour $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a $x \preceq' y$ si $\varphi(x) \preceq \varphi(y)$. Montrer que $\preceq'$ est une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}^n$ compatible avec la structure d'espace vectoriel.

2) On définit une relation $\preceq$ sur $\mathbb{R}^n$ par : pour $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$, on a $x \preceq y$ si $x = y$ ou $x \neq y$ et $x_k < y_k$ avec $k = min\{i \in \{1, ..., n\}, x_i \neq y_i\}$.

a) En munissant le plan $\mathcal{P}$ d'un repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, représenter graphiquement la partie $\{M(x, y) \in P; (0, 0) \preceq (x, y)\}$ en la hachurant d'une couleur particulière.

b) Montrer que la relation $\preceq$ est une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}^n$ compatible avec la structure d'espace vectoriel.

Exercice n°5

On définit l'opération dans $\mathbb{Z}^2$: $(a, b) * (a', b') = (aa', ab' + b)$.

1) Étudier les propriétés de cette loi de composition.

2) Pour $z \in \mathbb{Z}$, on pose $f_{a,b}(z) = az + b$. Montrer que $\varphi : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$, $(a, b) \mapsto f_{a,b}$ est un morphisme pour $*$ et $\circ$.

Exercice n°6

Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même définie par $f((x, y)) = (x + y, xy)$ pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$.

1) Calculer $f^{-1}(\{(3, 2)\})$. f est-elle injective ?

2) f est-elle surjective ? Déterminer son image.

Exercice n°7

Soient f une application de E dans F, g une application de F dans G et $h = g \circ f$.

1) Montrer que si h est surjective et g injective, alors f est surjective.

2) Montrer que si h est injective et f surjective alors g est injective.

Exercice n°8

Soient E et F deux ensembles non vides et f une application de E dans F. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications de F dans E.

1) Soient A_1 et A_2 deux parties de E. Montrer que l'on a toujours $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$ mais que $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$ avec égalité si f est injective.

2) Soient B_1 et B_2 deux parties de F.
Montrer que $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ et que $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

3) Soient A une partie de E et B une partie de F. Montrer que :
$A \subset f^{-1}\left(f(A)\right)$ avec égalité si f est injective et $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$ avec égalité si f est surjective

4) Montrer que f est injective si et seulement si : $\forall g \in \mathcal{F}, \forall h \in \mathcal{F}, (f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h)$

Exercice n°9

Soit $f : A \to B$ une application. Montrer que f est injective si et seulement si, pour tous sous-ensembles X et Y de A, on a $f(X) \cap f(Y) \subset f(X \cap Y)$.

Exercice n°10

Soient A et B deux ensembles non vides et f une application de A dans B. Montrer que :

1) si f est injective alors on peut construire une application surjective g de B dans A telle que $g \circ f = Id_A$.

2) si f est surjective alors on peut construire une application injective h de B dans A telle que $f \circ h = Id_B$.

Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Exercice n°11

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = 1 + 10 + 100 + \ldots + 10^n$

1) Trouver deux entiers naturels distincts n et p tels que $u_n - u_p$ soit divisible par 24.

2) Plus généralement, montrer que, pour tout nombre $a \in \mathbb{N}$, il existe un multiple non nul de a qui s'écrit en écriture décimale uniquement avec les chiffres 1 et 0.

Exercice n°12

Énoncer des critères de divisibilité par 6, par 2 et par 5 à partir de l'écriture en base six d'un nombre.

Exercice n°13 (*CAPES 2006, épreuve sur dossier*)

1) Soit m un entier relatif. On note (E_m) l'équation $11x + 13y = m$, d'inconnue (x, y). Trouver toutes les solutions (x, y) de (E_m) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

2) On suppose désormais que m est un entier naturel. Montrer qu'il y a autant de solutions (x, y) de l'équation (E_m) dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ qu'il y a d'entiers dans le segment $[\frac{5m}{11}, \frac{6m}{13}]$.

3) Montrer que si $m < 143$ (resp. $m \geq 143$), alors l'équation (E_m) possède au plus (resp. au moins) une solution (x, y) dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Exercice n°14

Soient m et n deux entiers naturels premiers entre eux. Montrer que tout diviseur d de mn s'écrit de manière unique $d = d_1 d_2$ avec $d_1 | m$, $d_2 | n$ et d_1 et d_2 premiers entre eux.

Exercice n°15

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note μ_n le groupe des racines nièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$. Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. On note $d =$pgcd(n, m) et $p =$ ppcm(m, n).

1) Montrer que $G = \mu_n \cap \mu_m$ est cyclique et en donner un générateur.

2) Même question avec le sous-groupe H de $(\mathbb{C}^*, \times)$ engendré par $\mu_n \cup \mu_m$.

Exercice n°16

On cherche à résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 + 5y^2 = z^2$.

1) Montrer qu'il suffit de chercher les solutions telles que $pgcd(x, z) = 1$.

2) Soit (x, y, z) une telle solution. On note $d = pgcd(z - x, z + x)$. Montrer que d divise 2.

a) On suppose que $d = 1$. Montrer qu'il existe deux entiers impairs u et v tels que $y = uv$ et $2z = 5u^2 + v^2$.

b) On suppose que $d = 2$. Montrer qu'il existe deux entiers u et v l'un pair, l'autre impair tels que $y = 2uv$ et $z = 5u^2 + v^2$.

3) Résoudre l'équation de départ.

Exercice n°17

Quel est le nombre de diviseurs de 192 080 000 ?
Quel est le chiffre des unités dans l'écriture en base 10 du nombre $7^{7^{7^{7^{7^{7^{7}}}}}}$?

Exercice n°18

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note d_n le nombre de diviseurs positifs de n.

1) Montrer que si $n = ab$ avec $a \wedge b = 1$, alors $d_n = d_a d_b$.

2) Montrer que n est un carré parfait si et seulement si d_n est impair.

3) Montrer que : $\displaystyle\prod_{d|n} d = \sqrt{n}^{d_n}$.

Exercice n°19

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le cardinal de $\{(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ a \vee b = n\}$ est égal au nombre de diviseurs de n^2.

Exercice n°20

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'on peut trouver n entiers consécutifs dont aucun n'est premier.

2) Montrer que si un produit d'entiers naturels est de la forme $4n - 1$ alors au moins l'un des facteurs est de la même forme. En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4n - 1$.

3) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \geq 3$ un diviseur premier de $n^2 + 1$. Montrer que $p \equiv 1\,[4]$. En déduire qu'il y a une infinité de nombres premiers de la forme $4k + 1$.

Exercice n°21 (*Deuxième épreuve 1992*)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $E_n = \{z \in \mathbb{Z}[i],\ |z|^2 = 5^n\}$ où $\mathbb{Z}[i] = \{x + iy,\ x, y \in \mathbb{Z}\}$.
Soit $z = x + iy$ un élément de E_n avec $n \geq 1$. Montrer que (x, y) vérifie l'un des systèmes

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} 2x - y \equiv 0 \pmod 5 \\ x + 2y \equiv 0 \pmod 5 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad (2) \left\{ \begin{array}{r} 2x + y \equiv 0 \pmod 5 \\ -x + 2y \equiv 0 \pmod 5 \end{array} \right.$$

En déduire que l'un des nombres $\dfrac{z}{2+i}$ ou $\dfrac{z}{2-i}$ appartient à E_{n-1}.

Exercice n°22 (*Petit théorème de Fermat*)

1) Soit p un nombre premier. Montrer que, pour tout entier k de $[1, p - 1]$, p divise $\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix}$.

2) En déduire que pour $a, b \in \mathbb{Z}$ on a $(a + b)^p \equiv a^p + b^p \bmod p$, puis que $a^p \equiv a \bmod p$.

$\boxed{\textbf{Exercice n°23}}$

Soit $p > 3$ un nombre premier.

1) Montrer qu'une équation du second degré : $x^2 + ax + b = 0$ admet une solution dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ si et seulement si son discriminant : $a^2 - 4b$ est un carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

2) On suppose que $p \equiv 1\ [3]$: $p = 3q + 1$. Montrer que $\exists a \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$, $a^q \neq \dot{1}$. En déduire que $-\dot{3}$ est un carré.

3) Réciproquement, on suppose que $-\dot{3}$ est un carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Montrer que $p \equiv 1\ [3]$.

$\boxed{\textbf{Exercice n°24}}$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{Z}$. On note $\bar{k}$ le classe de k modulo n. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :
(i) $\mathrm{pgcd}(n, k) = 1$
(ii) $\bar{k}$ est un générateur du groupe additif $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
(iii) $\bar{k}$ est inversible dans l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (c'est à dire que $\bar{k}$ est élément du groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$).

$\boxed{\textbf{Exercice n°25}}$

Soit $n = pq$ où p et q sont deux nombres premiers distincts.
Soient a, b deux entiers naturels tels que $ab \equiv 1 \quad [\varphi(n)]$. Montrer que les applications f et g de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans lui-même définies respectivement par $x \mapsto x^a$ et $x \mapsto x^b$ sont réciproques l'une de l'autre.

$\boxed{\textbf{Exercice n°26}}$ *(Propriété universelle de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$)*

Soients n dans $\mathbb{N}$ et Γ un groupe.

1) Montrer que l'application $\varphi :\ \begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\text{groupes}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \Gamma) & \longrightarrow & \{\gamma \in \Gamma | \gamma^n = e\} \\ f & \longmapsto & f(1 \bmod n) \end{array}$ est une bijection.
Est-ce un isomorphisme de groupes ? Déterminer l'application réciproque de φ.

2) Déterminer tous les endomorphismes du groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Montrer que l'ensemble des automorphismes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, muni de la composition, est un groupe isomorphe au groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.

$\boxed{\textbf{Exercice n°27}}$

1) Montrer que 2 est un générateur de $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^*$. Dresser une table donnant pour tout x de $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^*$ l'unique entier n tel que $x = 2^n$ et $0 \leq n < 12$ (n est appelé *logarithme discret* de x).

2) Résoudre l'équation $6x^2 \equiv 5 \quad [13]$ en cherchant x sous la forme 2^n à l'aide de la table précédente.

$\boxed{\textbf{Exercice n°28}}$ *(D'après la deuxième épreuve 2003)*

Pour tout entier $n \geq 1$, on note $\varphi(n)$ le nombre d'entiers k premiers avec n et tels que $1 \leq k \leq n$. La fonction $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ ainsi définie est appelée *fonction d'Euler*.

1) Soit $n \geq 1$ un entier. Montrer que $\varphi(n)$ est égal au nombre de générateurs du groupe cyclique $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

2) Soient m et n deux entiers naturels non nuls et premiers entre eux. Montrer que $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$.

3) Soient $p > 1$ un nombre premier et $\alpha > 0$ un entier. Montrer que $\varphi(p^\alpha) = p^{\alpha-1}(p - 1)$.

4) Soient $n \geq 2$ un entier et $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ sa décomposition en facteurs premiers. Montrer que :

$$\varphi(n) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i - 1}(p_i - 1) = n(1 - \frac{1}{p_1}) \cdots (1 - \frac{1}{p_k})$$

5) Soient $n > 0$ un entier et $D_n = \{d \in \mathbb{N}^* | d \text{ divise } n\}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{d \in D_n} \varphi(d) = n$ (on pourra considérer l'application g définie sur $E_n = \{1, 2 \cdots, n\}$ par $g(x) = \mathrm{pgcd}(x, n)$).

$\boxed{\textbf{Exercice n°29}}$ *(Théorème Chinois)*

Soient a et b deux entiers strictement positifs. On note d le PGCD de a et b, m leur PPCM, et l'on pose $a = da'$ et $b = db'$. On considère l'homomorphime de groupes : $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$, $x \longmapsto (x \bmod a, x \bmod b)$

1) Déterminer le noyau de φ. En déduire le cardinal de l'image de φ et une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que φ soit surjectif.

2) On considère l'homomorphisme naturel de groupes :

$$\psi : \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/b\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z},\ (y,z) \longmapsto (y \bmod d) - (z \bmod d)$$

Montrer que ψ est surjectif. En déduire le cardinal du noyau de ψ. Calculer $\psi \circ \varphi$ et en déduire (en utilisant les questions précédentes) que $\mathrm{Im}\ \varphi = \mathrm{Ker}\ \psi$.

3) Etant donnés deux entiers α et β, donner une condition nécessaire et suffisante sur d, α et β pour que le système $\quad (*) \quad x \equiv \alpha \pmod a \quad x \equiv \beta \pmod b$
admette au moins une solution $x \in \mathbb{Z}$. Si x_0 est une solution de $(*)$, décrire l'ensemble de toutes les solutions.

Polynômes et arithmétique

Exercice n°30 *(D'après la deuxième épreuve 2002)*

On note $\mathcal{P}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$ l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

1) Soient $n \in \mathbb{N}$ et Γ_n le polynôme défini par $\Gamma_0(X) = 1$ et, pour $n > 0$, $\Gamma_n(X) = \dfrac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!}$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\Gamma_n \in \mathcal{P}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$ (on pourra discuter suivant les cas $0 \le k < n$, $k \ge n$ et $k < 0$).

b) Montrer que pour tout entier naturel m, la famille $(\Gamma_n)_{0 \le n \le m}$ forme une base de l'espace vectoriel des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré au plus m.

2) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré au plus m. Montrer que $P \in \mathcal{P}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$ si et seulement s'il existe $m+1$ entiers consécutifs en lesquels les valeurs de P sont des entiers.

Exercice n°31

Soit p un nombre premier et $P = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$ un polynôme de degré $n \ge 1$ à coefficients entiers tel que a_n n'est pas divisible par p, montrer que parmi les nombres $\{0,1,2,\ldots,p-1\}$, il n'existe pas plus de n nombres x pour lesquels $P(x)$ soit divisible par p.
Montrer par un contre exemple, que ce résultat n'est plus vrai si p n'est pas premier.

Exercice n°32

1) Quel est le reste dans la division euclidienne de $X^{19} + 4X^{16} + 3X^5 + X + 1$ par $X^2 + X + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$?

2) Montrer que si trois polynômes P, Q, R de $\mathbb{R}[X]$ vérifient la relation $P^2 - XQ^2 = XR^2$, ils sont nuls. Est-ce encore vrai dans $\mathbb{C}[X]$?

3) Montrer que pour tout polynôme P de $\mathbb{C}[X]$, le polynôme $P[P(X)] - X$ est divisible par $P(X) - X$.

Exercice n°33

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \ge 0$. Montrer qu'il existe des polynômes A et B de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$.

Exercice n°34 *(Deuxième épreuve 2003)*

1) Soient n un nombre premier et $P \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\,[X]$ de degré $k \ge 1$. Montrer que P a au plus k racines.

2) Déterminer les racines du polynôme $X^2 - X$ de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}\,[X]$.

3) Trouver dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}\,[X]$ deux factorisations distinctes de $X^2 - X$ sous la forme $(X - \dot{a})(X - \dot{b})$.

Espaces vectoriels, applications linéaires, matrices, réduction

Exercice n°35 *(Deuxième épreuve 1998)*

Soient ABC un triangle et M un point du plan affine. Montrer que si λ, μ et ν ne sont pas tous nuls et vérifient $\lambda\overrightarrow{MA} + \mu\overrightarrow{MB} + \nu\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$ alors on a $\lambda + \mu + \nu \neq 0$.

Exercice n°36

Soient F et G deux sous-espaces d'un espace vectoriel $\mathbb{E}$.

1) Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace de $\mathbb{E}$ si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

2) En déduire que si $F \neq E$ et $G \neq E$, alors $F \cup G \neq E$.

Exercice n°37

Montrer que deux matrices de $\mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ semblables dans $\mathcal{M}(n, \mathbb{C})$ sont semblables dans $\mathcal{M}(n, \mathbb{R})$.

Exercice n°38 *(Deuxième épreuve 1989)*

Soit A une matrice de $\mathcal{M}(d, \mathbb{R})$ $(d \geq 2)$ *nilpotente d'indice* r (c'est à dire qu'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $A^k = 0$ et que r est le plus petit de ces entiers).

1) Montrer que zéro est la seule valeur propre complexe de la matrice A. Quel est le polynôme caractéristique de A ? En déduire que $r \leq d$.

2) On désigne par $e(A)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}(d, \mathbb{R})$ engendré par les matrices $\{A^k,\ k \geq 0\}$. Montrer que $\mathcal{B} = \{Id,\ A, \cdots, A^{r-1}\}$ est une base de $e(A)$.

3) Soit $s \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que la matrice $(Id - A)^{s+1}$ appartient à $e(A)$; donner ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

b) Montrer que la matrice $(Id - A)^{s+1}$ est inversible et que son inverse est égale à $\displaystyle\sum_{0 \leq k \leq r-1} C_{s+k}^{s} A^k$.

Exercice n°39

Soit A un vecteur colonne de $\mathbb{R}^n$. Montrer que la matrice carrée $A.{}^tA$ est diagonalisable.

Exercice n°40

On appelle projecteur d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, tout endomorphisme p de E vérifiant $p \circ p = p$. Montrer que si p est un projecteur de E alors $E = \text{Ker } p \oplus \text{Im } p$ et $\text{Im } p = \text{Ker } (id_E - p)$.
En déduire qu'en dimension finie un projecteur est toujours diagonalisable. Ce résultat est-il surprenant ?

Exercice n°41

Soit $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{C})$ ayant toutes ses valeurs propres deux à deux distinctes.
Montrer que la famille $(I, A, A^2, \cdots, A^{n-1})$ est libre.

Exercice n°42

On donne trois nombres complexes $a,\ b,\ c$ et les deux matrices suivantes :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M = \begin{pmatrix} a & b & c & b & c \\ c & a & b & c & b \\ b & c & a & b & c \\ c & b & c & a & b \\ b & c & b & c & a \end{pmatrix}$$

1) Calculer J^2, J^3, J^4, J^5; puis trouver un polynôme P de degré inférieur ou égal à 4 tel que $M = P(J)$.

2) Déterminer les vecteurs propres et les valeurs propres de J. J est-elle diagonalisable ?

3) Déduire des questions 1. et 2. que M est diagonalisable. Préciser ses valeurs propres et ses vecteurs propres.

4) On suppose à présent que $b = c$. Déduire de 3. le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de M.

5) On suppose $b = c \neq 0$. Déterminer deux suites de complexes (α_n) et (β_n) telles que $M^n = \alpha_n M + \beta_n I_5$.

Exercice n°43

Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E, vérifiant $f \circ g - g \circ f = id_E$.

1) Montrer que $\forall Q \in \mathbb{K}[X],\ f \circ Q(g) - Q(g) \circ f = Q'(g)$.

2) Montrer que : $\exists P \in \mathbb{K}[X],\ P \neq 0$ et $P(g) = 0$.

3) Que peut-on en déduire lorsque $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle ?

Exercice n°44

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel sur un corps K et P un polynôme annulateur de u.

1) Montrer que $E = \text{Ker } P(u)$ et que toute valeur propre de u est racine de P.

2) Montrer que si $P(0) \neq 0$ alors u est bijectif.

Exercice n°45

Soient u un endomorphisme d'un espace vectoriel sur un corps K et P, Q_1, Q_2 dans $K[X]$ tels que $P = Q_1 \times Q_2$. Montrer que $P(u) = Q_1(u) \circ Q_2(u) = Q_2(u) \circ Q_1(u)$. Montrer que si de plus Q_1 et Q_2 sont premiers entre eux, alors $\text{Ker } P(u) = \text{Ker } Q_1(u) \oplus \text{Ker } Q_2(u)$.

Exercice n°46

Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que $\det u = 0$ et $\text{tr } (u) = 0$. Montrer que u est nilpotent. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice n°47

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n.

1) Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, P son polynôme minimal et p le plus petit exposant de X dans l'écriture de P. On suppose $p \neq 0$. Montrer que $E = \text{Im } u^p \oplus \text{Ker } u^p$. Que se passe-t-il si $p = 0$?

2) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(f) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. Montrer que $\text{Ker } f \oplus \text{Im } f = E$.

Exercice n°48

1) Donner une décomposition de Dunford de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2) Soit $A = D + N$ la décomposition de Dunford de $A \in M_n(\mathbb{C})$. Quelle est celle de $A^k, k \in \mathbb{N}^*$? Si on suppose en outre A inversible, quelle est celle de A^{-1} ?

Formes quadratiques - Espaces euclidiens

Exercice n°49 VRAI ou FAUX

Soient $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E un K-e.v. de dimension n et q, q' deux formes quadratiques sur E. Pour chacune des propriétés suivantes, la démontrer ou expliciter un contre-exemple :

1) Si q et q' sont non dégénérées, il en est même de $q + q'$.

2) $K = \mathbb{R}$, si q et q' sont définies positives, il en est même de $q + q'$.

3) $K = \mathbb{R}$, si q est positive et q' est définie positive, alors $q + q'$ est non dégénérée.

4) Si x est isotrope, $x \in N(q)$.

5) $K = \mathbb{R}$, si $I(q) = \{0\}$ alors ou bien q est positive, ou bien q est négative.

Exercice n°50

Soit $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie dans la base canonique par $q(x) = x_1^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $v = (1, 1, 1)$.

1) Déterminer $\text{rang}(q)$, $N(q)$, $I(q)$, $F^\perp$ et $F^{\perp\perp}$.

2) Vérifier que $N(q) \subseteq F^\perp$ et que $F^{\perp\perp} = F + N$.

Exercice n°51

Soit $b : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $(A, B) \longmapsto b(A, B) = \mathrm{tr}(AB)$.

1) Montrer que b est une forme bilinéaire symétrique.

2) On suppose que $n = 2$. Trouver la matrice de b dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer le rang et le noyau de b. Cette forme est-elle non dégénérée ?

Exercice n°52

Montrer qu'une forme quadratique q sur un espace vectoriel réel est positive ou négative si et seulement si son noyau est égal à son cône isotrope.

Exercice n°53

On considère les formes quadratiques sur $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^4$ définies par :

1) $q(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_2x_3$

2) $q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 8x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 10x_2x_3$

3) $q(x) = 5x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$

Déterminer une base orthogonale (orthonormale lorsque cela est possible) pour q. Préciser la matrice de q dans cette base et la signature de q.

Exercice n°54

Soit A une matrice réelle carrée d'ordre n. Montrer que $B = {}^tAA$ est la matrice d'une forme quadratique q sur $\mathbb{R}^n$. Prouver que q est positive. A quelle condition q est-elle un produit scalaire ?

Exercice n°55

On munit l'espace $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ de son produit scalaire et de sa norme usuels. On identifie une matrice (n, n) réelle A avec l'endomorphisme quelle représente dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et on note $\|A\| = \sup\{\|Ax\|, \|x\| \leq 1\}$. Soit A une matrice (n, n) réelle symétrique.

1) Montrer que $\|A\|$ est égal au maximum des valeurs absolues des valeurs propres de A.

2) Montrer que la plus grande valeur propre de A, notée λ, est égale à la borne supérieure des nombres $\dfrac{< Ax, x >}{\|x\|^2}$ où $x \in \mathbb{R}^n$ et $x \neq 0$.

3) Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $Ax = \lambda x$ si et seulement si $< Ax, x >= \lambda\|x\|^2$.

Exercice n°56

Pour quelles valeurs $\lambda \in \mathbb{R}$ les formes bilinéaires sur $\mathbb{R}^3$ ci-dessous définissent-elles un produit scalaire ?

1) $a(x, y) = x_1y_1 + 6x_2y_2 + 3x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3\lambda x_1y_3 + 3\lambda x_3y_1$

2) $b(x, y) = x_1y_1 + 10x_2y_2 + \lambda x_3y_3 + 6x_1y_2 - x_2y_3 - x_3y_2$

3) $c(x, y) = 2x_1y_1 + 7x_1y_2 + 7x_2y_1 + 8x_2y_2 - 3x_3y_3 + \lambda x_2y_3 + \lambda x_3y_2$.

Exercice n°57

Soient E un espace euclidien de dimension n sur $\mathbb{R}$, F un s.e.v. de dimension p et $x \in E$. Montrer l'existence et l'unicité de $y \in F$ tel que $\| x - y \|$ soit minimum. Dans une base convenablement choisie, exprimer y en fonction de x. Traduire le résultat en termes de distance.
Applications :

1) Trouver a et b tel que $\int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx$ soit minimum. Calculer ce minimum.

2) Trouver a et b tel que $\int_0^1 (\ell n\, x - ax - b)^2 dx$ soit minimum. Calculer ce minimum.

Exercice n°58 Méthodes des moindres carrés.

Deux valeurs physiques sont liées par une relation $y = ax + b$. On veut trouver a et b. On fait n expériences de résultats $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq n}$. Montrer qu'on peut trouver a, b tels que $\sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2$ soit minimum. Déterminer a et b.

$\boxed{\textbf{Exercice n°59}}$ *(Deuxième épreuve 1998)*
Soit E un plan vectoriel euclidien.

1) Montrer qu'un endomorphisme Ψ de E est symétrique si et seulement s'il existe une base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ de E telle que $\vec{u}.\Psi(\vec{v}) = \Psi(\vec{u}).\vec{v}$.

2) Montrer que l'inverse d'un automorphisme symétrique de E est symétrique.

$\boxed{\textbf{Exercice n°60}}$

Soient E un espace euclidien et $p \in L(E, E)$ tel que $p\ o\ p = p$. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si p est symétrique.

$\boxed{\textbf{Exercice n°61}}$

Soit f un endomorphisme orthogonal d'un espace euclidien.

1) Montrer que $Ker(f - Id) = Im(f - Id)^{\perp}$

2) En déduire que si $(f - Id)^2 = 0$, alors $f = Id$.

$\boxed{\textbf{Exercice n°62}}$

On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire standard.

1) Caractériser géométriquement les endomorphismes de matrices :

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -1 & -4 \\ -1 & 8 & -4 \\ -4 & -4 & -7 \end{pmatrix} \quad C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

On pourra d'abord calculer A^2, B^2, C^2.

2) Trouver les matrices, dans la base canonique, de :

- la projection orthogonale sur le plan d'équation $x - 3y + z = 0$.
- la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $2x + 2y - z = 0$.

$\boxed{\textbf{Exercice n°63}}$ *(CAPES 2001)*
Soit M la matrice réelle d'ordre quatre $M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Calculer M^2 et M^3, et vérifier que M^3 est combinaison linéaire de M et de M^2.

2) Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 1 la matrice M^n peut s'écrire sous la forme :

$$M^n = a_n M + b_n M^2$$

et calculer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

3) Généralisation : soit P une matrice symétrique réelle de rang 2. Prouver que P annule un polynôme de degré au plus trois, sans terme constant.

$\boxed{\textbf{Exercice n°64}}$ Réduction simultanée de deux formes quadratiques.

1) Soient $V = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et deux formes quadratiques : $q_1(V) = x^2 + 2xy + 2y^2$ et $q_2(V) = x^2$.

a) Pour chacune des formes quadratiques, trouver une base où elle soit réduite.

b) Trouver une base de $\mathbb{R}^2$, qui soit orthonormale pour l'une des deux formes quadratiques et orthogonale pour l'autre.

2) Sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ on considère $q_2(x) = x_1x_2 + x_1x_3$. trouver une base orthonormale dans laquelle la matrice de q_2 soit diagonale.

Exercice n°65

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, de dimension 3, rapporté à une base B dans laquelle on donne les deux formes quadratiques q et q' :

$$\begin{aligned} q(x) &= 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_1 \\ q'(x) &= 2x_1^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 6x_3x_1 \end{aligned}$$

Montrer qu'il existe une base de E à la fois orthogonale pour q et pour q'. Déterminer une telle base.

Exercice n°66

Dans un $\mathbb{R}$ espace vectoriel E de dimension finie, on donne deux formes quadratiques q et r vérifiant :
$\forall x \in E\backslash\{0\}$, $q(x) + r(x) > 0$. Prouver qu'il existe une base de E orthogonale à la fois pour q et r.

Exercice n°67

Montrer qu'il n'existe pas de base simultanément orthogonale pour les deux formes quadratiques définies sur $\mathbb{R}^2$ (muni de la base canonique) par $q(x,y) = x^2 - y^2$ et $q'(x,y) = 2xy$.

Exercice n°68 Etude des quadriques $\{M \in \mathbb{R}^n$ tel que $q(\overrightarrow{OM}) = b\}$ où $b \in \mathbb{R}$.

Pour les équations suivantes, donner la nature et les caractéristiques des courbes ou surfaces considérées.

1) $2x^2 + 3xy - 2y^2 = 10$ 2) $13x^2 + 10y^2 + 5z^2 - 12yz - 6xz - 4xy = 14$

3) $4x^2 + 6xy + 4y^2 + \sqrt{2}(x+y) = 0$

Exercice n°69 *(d'après CAPES 1995)*

Si A est une matrice symétrique réelle d'ordre 2, on note

$$\Sigma_A = \{x \in \mathbb{R}^2,\ Q_A(x) = {}^tXAX = 1\}$$

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A ainsi qu'une matrice orthogonale P telle que ${}^tPAP$ soit diagonale. Quelle est la nature de la conique Σ_A ?

2) Vérifier que la forme quadratique Q_B est positive. Quelle est la nature de la conique Σ_B ?

Exercice n°70 (Représentation canonique des transformations orthogonales.)

Soient f un endomorphisme orthogonal d'un espace euclidien E et $g = f + f^*$.

1) Montrer que g est auto-adjoint. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ ses valeurs propres distinctes et V_{λ_i} les sous-espaces propres associés.

2) Montrer que les V_{λ_i} sont stables par f. On notera dorénavant f_{λ_i} la restriction de f à V_{λ_i}.

3) Montrer que le polynôme $Q(X) = X^2 - \lambda_i X + 1$ est annulateur de f_{λ_i}.

4) On suppose $V_2 \neq \{0\}$. Montrer que $f_2 = Id$.

5) On suppose $V_{-2} \neq \{0\}$. Montrer que $f_{-2} = -Id$.

6) Soit $\lambda_i \neq \pm 2$ tel que $V_{\lambda_i} \neq \{0\}$. Montrer que si $v \in V_{\lambda_i}\backslash\{0\}$, alors v n'est pas vecteur propre de f. En déduire que W= s.e.v. engendré par $\{v, f(v)\}$ est de dimension 2.

7) Montrer que W et $W^\perp$ sont stables par f et que la restriction $\tilde{f} = f_{|W}$ de f à W est une rotation.

8) En déduire qu'il existe une base orthonormée de E, dans laquelle la matrice de f est :

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & 0 & & & \\ & & 1 & & & & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & & & \\ & & & & & -1 & & & & & & \\ & & & & & & \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & & & & \\ & & & & & & \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & & & & \\ & 0 & & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & & & \cos\theta_r & -\sin\theta_r \\ & & & & & & & & & \sin\theta_r & \cos\theta_r \end{pmatrix}$$