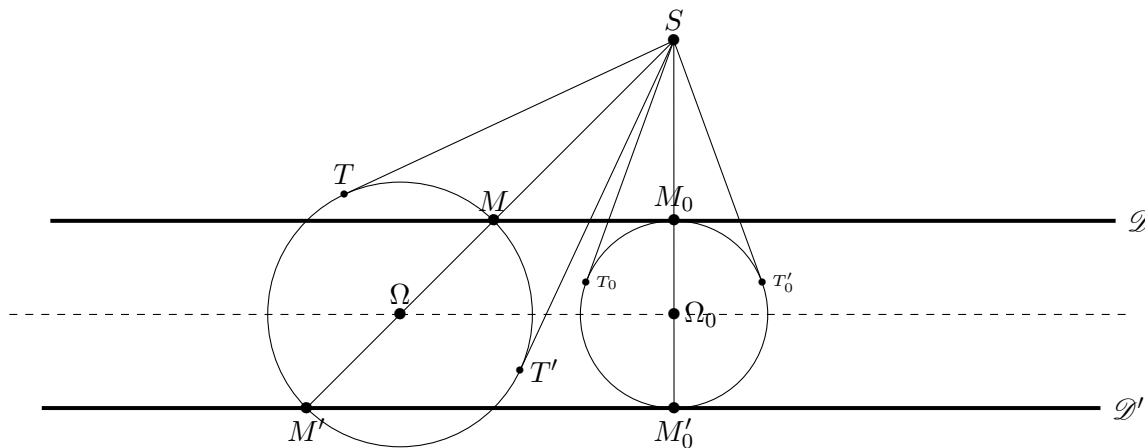


Algèbre et Géométrie 1

Corrigé rapide de l'exercice à rendre pour le 14 novembre 2019

1)



- 2) • On pouvait par exemple dire qu'une similitude directe s est caractérisée par son centre, son rapport et son angle. L'unique similitude solution est donc celle de centre S , de rapport $k = \frac{S\Omega}{S\Omega_0}$ et d'angle

$\alpha = \widehat{(S\Omega_0, S\Omega)}$ Cet angle est un angle orienté de vecteurs et non pas un angle géométrique qui est insuffisant pour caractériser une rotation de centre donné..

- On pouvait également dire qu'une similitude directe est caractérisée par son expression complexe φ donc par les complexes a et b (avec $a \neq 0$) tels que $\varphi(z) = az + b$. Une telle similitude est de centre S (d'affixe c) et envoie Ω_0 (d'affixe ω_0) sur Ω (d'affixe ω) si et seulement si
$$\begin{cases} c = a\omega_0 + b \\ \omega = a\omega_0 + b \end{cases} \quad \text{Comme } \Omega_0 \neq S,$$
 il est clair que ce dernier système a une unique solution.

Montrons que cette similitude transforme M_0 en M . Il est déjà clair que $(\Omega\Omega_0) \parallel \mathcal{D} = (M_0M)$. (Petit exercice classique utilisant au choix la droite des milieux dans un triangle ou la réciproque du théorème de Thalès puisque $\frac{M\Omega}{MM'} = \frac{M_0\Omega_0}{M_0M'_0} (= \frac{1}{2})$.)

Le théorème de Thalès dans le triangle $S\Omega\Omega_0$ donne alors $\frac{SM}{SM_0} = \frac{S\Omega}{S\Omega_0} = k$. De plus $M \in [S\Omega]$ et $M_0 \in [S\Omega_0]$ donc $\widehat{(SM_0, SM)} = \widehat{(S\Omega_0, S\Omega)} = \alpha$. On a bien $s(M_0) = M$.

Montrons que cette similitude transforme T_0 en T .

L'image par la similitude s du cercle \mathcal{C}_0 de centre Ω_0 et de rayon Ω_0M_0 est le cercle \mathcal{C} de centre $\Omega = s(\Omega_0)$ et de rayon $\Omega M = k\Omega_0M_0$ c'est à dire le cercle de diamètre $[MM']$.

- On peut alors invoquer la conservation du contact (entre un cercle et une droite) par une similitude, pour obtenir $s(T_0) \in \{T, T'\}$. On pouvait retrouver ce résultat en utilisant le fait qu'une similitude conserve l'orthogonalité pour vérifier qu'une tangente à \mathcal{C}_0 est transformée en une tangente à \mathcal{C} .

- On pouvait aussi remarquer que $S\Omega_0T_0$ est rectangle en T_0 donc T_0 appartient au cercle de diamètre $[S\Omega_0]$, cercle qui est transformé par s en le cercle de diamètre $[S\Omega]$ (ce dernier cercle intersectant \mathcal{C} en T et T').

Dans les deux cas on concluait que $s(T_0) = T$ par conservation des angles orientés de vecteurs (s étant directe).

3) Soit donc s_0 la similitude directe de centre S qui transforme Ω_0 en T_0 .

La relation de Chasles sur les angles donne $\widehat{(S\Omega_0, ST_0)} = \widehat{(S\Omega_0, S\Omega)} + \widehat{(S\Omega, ST_0)}$ et donc, d'après la question précédente, $\widehat{(S\Omega_0, ST_0)} = \widehat{(ST_0, ST)} + \widehat{(S\Omega, ST_0)} = \widehat{(S\Omega, ST)}$.

De même, $\frac{ST_0}{S\Omega_0} = \frac{S\Omega}{S\Omega_0} \cdot \frac{ST_0}{S\Omega}$ donc $\frac{ST_0}{S\Omega_0} = \frac{ST}{S\Omega} \cdot \frac{ST_0}{S\Omega} = \frac{ST}{S\Omega}$. On a donc bien $s_0(\Omega) = T$.

4) Le lieu du point Ω lorsque la sécante passant par S varie n'est autre que la droite parallèle à \mathcal{D} passant par Ω_0 (c'est à dire l'axe de la réflexion qui échange \mathcal{D} et \mathcal{D}'). D'après la question précédente, le lieu du point T est l'image de cette droite par la similitude s_0 . C'est donc la droite (T_0T) . Or $(S\Omega_0) \perp (\Omega_0\Omega)$ donc $(s_0$ conserve l'orthogonalité) $(ST_0) \perp (T_0T)$. Comme $(ST_0) \perp (T_0\Omega_0)$, on a $(T_0T) \parallel (T_0\Omega)$ et le lieu du point T est finalement la droite (Ω_0T_0) . (Droite en bleu sur la figure ci-dessous.)

De même, le lieu de T' est la droite $(\Omega_0T'_0)$. (Droite en vert sur la figure ci-dessous.)

