Université de Rennes

Préparation à l'oral

Exercice n° 9 - A

Thème : Intégration

L'exercice

On considère la fonction F définie, pour $x \in [1,+\infty[$ par :

$$F(x) = \int_1^x \sqrt{t}\, e^{1-t} \mathrm{d}t.$$

1) Justifier que F est bien définie sur $[1,+\infty[$.

2) Démontrer que pour tout réel t positif, on a : $2\sqrt{2}\sqrt{t} \leqslant t+2$.
En déduire, en utilisant une intégration par parties, que

$$\forall x \in [1,+\infty[\qquad 0 \leqslant F(x) \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(4-(x+3)e^{1-x}\right).$$

puis que : $\forall x \in [1,+\infty[\qquad 0 \leqslant F(x) \leqslant \sqrt{2}$.

3) La fonction F admet-elle une limite en $+\infty$?

Le travail à exposer devant le jury

Q1) Énoncer la propriété de croissance de l'intégrale utilisée dans la question 2) de l'exercice.

Q2) Quand dit-on qu'une intégrale généralisée est convergente ? Donner la définition.

Q3) Énoncer et démontrer le théorème d'intégration par parties.

Q4) Présenter une correction détaillée de l'exercice proposé.