

Préparation à l'oral

Exercice n° 6 - B

Thème : Intégration

L'exercice

On se propose de calculer la valeur exacte de :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$$

On pose pour tout réel $x \in [0, 1]$:

$$I(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$$

1) Montrer que la fonction $x \mapsto I(x)$ est dérivable sur $[0, 1]$ et calculer sa fonction dérivée I' .

2) Pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, on pose :

$$F(x) = I(\tan(x))$$

a) Montrer que F est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ et calculer $F'(x)$.

b) Montrer que, pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, on a $F(x) = x$.

3) En déduire la valeur de I .

Le travail à exposer devant le jury

Q1) Comment relier la question 1) de l'exercice à la notion d'intégrale vue en Terminale ?

Q2) Expliciter les théorèmes principaux utilisés dans l'exercice.

Q3) Présenter une correction détaillée de la question 2) de l'exercice.