

Préparation à l'oral

Exercice n° 22 - A

Thème : Algèbre

SUJET A

Exercice :

Pour a et b entiers, le plus grand commun diviseur dans \mathbb{N} de a et b est noté $a \wedge b$.

Pour $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par \bar{a} la classe de a dans l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Enfin, pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on note I_n l'ensemble des éléments inversibles (pour la multiplication) de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

On rappelle que (I_n, \times) est un groupe commutatif.

1. Rappeler la définition de l'ordre (que l'on notera $o(x)$) d'un élément x d'un groupe fini $(G, .)$.
2. Soit $a \in \mathbb{Z}$. Démontrer que $\bar{a} \in I_n$ si et seulement si $a \wedge n = 1$.
3. Soit k un entier naturel. Montrer que, pour tout entier x ,

$$x^k \equiv 1 [n] \quad \text{si et seulement si} \quad o(\bar{x}) \text{ divise } k.$$
4. Sans justification, énumérer, dans un tableau ayant deux rangées, les éléments de I_{10} avec leurs ordres.
Faire de même avec les éléments de I_{12} .
5. Les groupes I_{10} et I_{12} sont-ils isomorphes ?

Notion mise en jeu :

Congruences - Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Il est attendu notamment que la candidate ou le candidat sache proposer une démonstration (ou au moins les points constitutifs d'une démonstration) du fait que (I_n, \times) est un groupe commutatif.