Université de Rennes

Préparation à l'oral

Exercice n° 21 - A

Thème : Géométrie

SUJET A

Exercice :

Le plan est muni du produit scalaire standard.

1. Soient trois points du plan A, B, C. Montrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AI^2 - IB^2$ où I est le milieu de $[BC]$.

Soient $\mathscr{C}$ le cercle du plan de centre O et de rayon R et M un point du plan n'appartenant pas à $\mathscr{C}$. On considère une droite $\mathscr{D}$ passant par M et intersectant $\mathscr{C}$ en deux points distincts A et B. On note $p_{\mathscr{C}}(M) = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$.

2. Dans le cas où $[AB]$ est un diamètre de $\mathscr{C}$, exprimer $p_{\mathscr{C}}(M)$ en fonction de R et OM.
3. On revient au cas où A et B sont quelconque et on note B' le symétrique de B par rapport à O. Montrer alors que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MB'}$. En déduire la valeur de $p_{\mathscr{C}}(M)$. Commenter.
4. Comment étendre la définition de $p_{\mathscr{C}}(M)$ au cas où $\mathscr{D}$ est tangente à $\mathscr{C}$?

On considère maintenant un autre cercle $\mathscr{C}'$ de centre O' et de rayon R' avec $O \neq O'$.

5. Déterminer le lieu des points M du plan tels que $p_{\mathscr{C}}(M) = p_{\mathscr{C}'}(M)$.

Notion mise en jeu :

Produit scalaire dans le plan. Il est attendu notamment que la candidate ou le candidat sache donner la définition d'un produit scalaire et en démontrer les propriétés fondamentales.