Université de Rennes

Préparation à l'oral

Exercice n° 20 - A

Thème : Équations différentielles

SUJET A

Exercice :

Soient a et b deux fonctions continues sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$. On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des fonctions y, dérivables sur I, telles que $y' + a(x)y = b(x)$ et $\mathscr{S}_0$ l'ensemble des fonctions y, dérivables sur I, telles que $y' + a(x)y = 0$.

1. Montrer que $\mathscr{S}_0$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. On suppose que $y_1 \in \mathscr{S}$. Montrer que la fonction y est dans $\mathscr{S}$ si et seulement si la fonction $y - y_1$ est solution de l'équation homogène $y' + a(x)y = 0$.
3. Démontrer que l'ensemble des solutions de l'équation homogène est $\{x \mapsto \lambda e^{-A(x)},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ où A est une primitive de a sur I.
4. Soit (E) l'équation différentielle $y' + y = 1 - e^{-x}$.
   (a) Résoudre l'équation différentielle (E_1) $\quad y' + y = 0$.
   (b) Déterminer une fonction u, dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que la fonction h, définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = u(x)e^{-x}$, soit une solution de (E).
   (c) Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

Notion mise en jeu :

Équations différentielles linéaires du premier ordre. Il est attendu notamment que la candidate ou le candidat sache expliciter la méthode de la variation de la constante pour la recherche d'une solution particulière et donner des exemples pertinents d'utilisation de cette méthode.