

Préparation à l'oral

Exercice n° 1 - B

Thème : optimisation

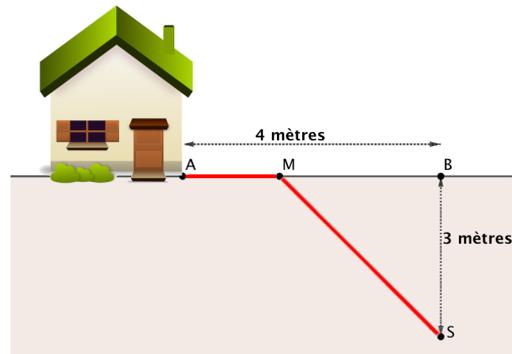
L'exercice

Une maison doit être raccordée, à partir du point A, à un réseau de gaz situé au point S, à 4 mètres de A horizontalement et à 3 mètres verticalement de B, à l'aide d'une conduite comme indiqué sur la figure ci-contre.

La conduite de gaz est schématisée en rouge.

L'installation de la partie de la conduite située à la surface du sol coûte 300 euros par mètre alors que celle enfouie sous le sol coûte 750 euros par mètre.

Où placer le point M sur le segment [AB] pour rendre le coût de raccordement minimal ?



Les productions de trois élèves de terminale scientifique

Élève 1

Si on enterre complètement la conduite, alors elle est représentée par [AS].

Avec le théorème de Pythagore, on a $AS = 5$ m et le coût vaut donc : $5 \times 750 = 3750$, donc 3 750 euros.

Si on va jusqu'au point B et que l'on descend verticalement jusqu'à S, alors le coût vaut :

$4 \times 300 + 3 \times 750 = 3450$, soit 3450 euros. Plus on ira vers B, moins il y aura de partie enterrée, donc le coût minimal est obtenu quand $M = B$, soit à 4 mètres de A.

Élève 2

Avec le tableur, je calcule, pour toutes les valeurs possibles de la distance AM (entre 0 et 4 mètres tous les centimètres car cela suffit dans la réalité), la distance MS avec Pythagore, puis le coût de la partie au sol et le coût de la partie enfouie. Le coût minimal total est 3 262,16 euros quand on commence à creuser à 2,69 mètres du point A.

	A	B	C	D	E
1	AM	MS	Coût au sol	Coût en terre	Coût total
2	0	5	0	3750,00	3750,00
3	0,01	4,99200361	3	3744,00	3747,00
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
270	2,68	3,27756007	804	2458,17	3262,17
271	2,69	3,277354548	807	2455,16	3262,16
272	2,7	3,26955654	810	2452,17	3262,17
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
402	4	3	1200	2250	3450

Élève 3

Je pose $AM = x$ et j'ai calculé la longueur $AM + MS$. J'obtiens une fonction $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 8x + 25}$. Avec ma calculatrice, je vois que la fonction est strictement croissante de 5 jusqu'à 7. Donc il faut mettre M en A pour avoir le minimum.

Les questions à traiter devant le jury

- 1) Analyser les productions de ces trois élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs.
- 2) Présenter une correction détaillée de l'exercice.
- 3) Quand dit-on qu'une fonction f est croissante? Quand dit-on que f admet un maximum? (Donner les définitions).
- 4) Énoncer le théorème faisant le lien entre les variations d'une fonction dérivable et la fonction dérivée. Comment démontrer ce théorème?