

## Préparation à l'oral

### Exercice n° 1 - A

#### Thème : arithmétique

### L'exercice

Soit  $n$  un entier naturel.

Démontrer que, dans l'écriture en base dix, les entiers  $n$  et  $n^5$  ont le même chiffre des unités.

### Les réponses de trois élèves de terminale scientifique spécialité mathématiques

#### Élève 1

Je regarde tous les cas possibles pour le chiffre des unités, entre 1 et 9.

$$1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1, \quad 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32, \quad 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$$

et ainsi de suite. Je calcule les autres avec un tableur, ça marche chaque fois, c'est le même chiffre.

#### Élève 2

J'ai comparé les restes de  $n^5$  et  $n$  dans la division euclidienne par 10 à l'aide d'un programme écrit en langage Python, j'obtiens les mêmes restes. Donc le chiffre des unités de  $n^5$  et  $n$  est le même.

```
1 from math import *
2 for n in range(10) :
3     a = (n * 5) % 10
4     b = n % 10
5     if a == b :
6         print(n)
```

#### Élève 3

J'ai calculé  $n^5 - n$  pour les premières valeurs de  $n$ , le dernier chiffre est 0.

Je vais le prouver par récurrence : je suppose que  $n^5 - n$  est multiple de 10 et alors je dois montrer que  $(n + 1)^5 - (n + 1)$  est aussi multiple de 10.

$$\begin{aligned}(n + 1)^5 - (n + 1) &= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 - n - 1 \\ &= (n^5 - n) + 10(n^3 + n^2) + 5(n^4 + n) \\ &= 5(n^4 + n)\end{aligned}$$

car  $n^5 - n$  et  $10(n^3 + n^2)$  sont des multiples de 10.

Ensuite, je ne sais pas quoi faire pour  $n^4 + n$ .

Tournez la page S.V.P.

## **Le travail à exposer devant le jury**

- 1) Analyser la production de chacun de ces élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs erreurs éventuelles.
- 2) Présenter une correction détaillée de l'exercice.
- 3) Énoncer et démontrer le théorème de division euclidienne (utilisé par l'élève 2).
- 4) Proposer un exemple de démonstration par récurrence (évoquée par l'élève 3).