Université de Rennes

Préparation à l'oral

Exercice n° 18 - B

Thème : Algèbre linéaire

L'exercice

E désigne un espace vectoriel réel de dimension finie. Soit $u : E \longrightarrow E$ un endomorphisme.

1. Rappeler la définition d'une valeur propre λ de u et celle du sous-espace propre E_λ associé.
2. Montrer que deux sous-espaces propres de u associés à des valeurs propres distinctes sont toujours en somme directe.
3. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à la dimension de E.
4. Montrer, presque sans calcul, que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable dans l'ensemble $\mathscr{M}(3, \mathbb{R})$ des matrices carrées à coefficients réels.
5. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les réels a, b et c pour que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ soit diagonalisable dans $\mathscr{M}(3, \mathbb{R})$.

Notion mise en jeu : Réduction des endomorphismes.

Il est attendu notamment que la candidate ou le candidat sache démontrer que, en dimension finie, les valeurs propres d'un endomorphismes sont exactement les racines de son polynôme caractéristique.