

Préparation à l'oral

Exercice n° 17 - B

Thème : Algèbre linéaire

L'exercice

On admet les notions d'espace vectoriel sur \mathbb{R} .

1. Qu'est-ce qu'une famille libre, une famille génératrice, une base d'un \mathbb{R} -espace vectoriel ?
2. Donner un exemple d'espace vectoriel admettant une base infinie dénombrable.
3. Rappeler les opérations qui permettent de munir l'ensemble E des fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} d'une structure d'espace vectoriel sur \mathbb{R} .

Donner deux autres lois de composition internes classiques de E .

4. Pour $a \in \mathbb{R}$ on note f_a la fonction, de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f_a(x) = e^{ax}$.
 - (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n réels $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ et un élément $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de \mathbb{R}^n .
Étudier la limite lorsque x tend vers $+\infty$ de $e^{-a_n x} \sum_{k=1}^n \lambda_k f_{a_k}(x)$.
 - (b) Montrer que la famille de fonctions $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ est une famille libre de E .
 - (c) L'espace vectoriel E admet-il une base dénombrable ?
 - (d) Donner un exemple d'espace vectoriel admettant une base non dénombrable.

Notion mise en jeu : Familles libres de vecteurs.

Il est attendu notamment que la candidate ou le candidat sache démontrer la liberté d'une famille infinie de fonctions.