

Préparation à l'oral**Exercice n° 17 - A****Thème : Suites numériques****L'exercice**

On admet les notions de monotonie et de convergence des suites réelles.

1. Donner la définition de deux suites réelles adjacentes.
2. Énoncer et démontrer le théorème de convergence des suites adjacentes.
3. On considère les deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ données, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{et} \quad w_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

- (a) Démontrer que pour tout réel $x \geq -1$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $(1+x)^n \geq 1+nx$.
- (b) Démontrer alors que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
- (c) On note e la limite commune de ces deux suites. Montrer que $\frac{9}{4} < e < \frac{27}{8}$.

Notion mise en jeu : Suites adjacentes.

Il est attendu notamment que la candidate ou le candidat sache démontrer qu'une suite réelle croissante et majorée converge.