Université de Rennes

Préparation à l'oral

Exercice n° 16 - B

Thème : Produit scalaire

L'exercice

1. Soit E un espace vectoriel réel. Rappeler ce qu'est un ***produit scalaire*** sur E. Qu'appelle-t-on ***espace euclidien*** ?
2. Dans un espace euclidien $(E, <,>)$, énoncer et démontrer l'***inégalité de Cauchy-Schwarz***. Traiter le cas d'égalité.
   En déduire que l'application $x \longmapsto \|x\| = \sqrt{<x,\, x>}$ est une norme.
3. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille de p vecteurs unitaires d'un espace euclidien $(E, <,>)$ de dimension p. On cherche, dans cette question, à montrer que $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base orthonormée de E si et seulement si, pour tout $x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{p} <x, e_i>^2$.
   (a) Montrer que toute base orthonormée $(e_1, \ldots, e_p)$ de E vérifie bien cette propriété.
   (b) Montrer que si la famille $(e_1, \ldots, e_p)$ vérifie cette propriété, elle est orthonormée.
   (c) Montrer que si la famille $(e_1, \ldots, e_p)$ vérifie cette propriété, elle engendre E (on pourra poser $y = \sum_{i=1}^{p} < x, e_i > e_i$ et calculer $||x - y||^2$).
   (d) Conclure.

Notion mise en jeu : Produit scalaire.

Il est attendu notamment que la candidate ou le candidat sache proposer une démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et traiter le cas d'égalité.