

Préparation à l'oral

Exercice n° 16 - A

Thème : Nombres complexes

L'exercice

1. Démontrer que, pour tout couple (z_1, z_2) de nombres complexes, $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
2. On suppose que z_1 et z_2 sont des nombres complexes non nuls. Montrer que l'inégalité précédente est une égalité si et seulement s'il existe un réel positif λ tel que $z_2 = \lambda z_1$. Interpréter ce résultat en termes d'argument.
3. Dans le plan orienté muni d'un repère orthonormal direct, on considère un point Ω d'affixe ω et un réel θ . Démontrer que l'affixe z' du point M' image d'un point M d'affixe z par la rotation de centre Ω et d'angle θ est définie par :

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$$

4. On considère un triangle ABC direct sur lequel on construit extérieurement trois triangles équilatéraux BCA' , ACB' et ABC' et on note P , Q et R les centres de gravité respectifs des triangles BCA' , ACB' et ABC' .
Soient $a, b, c, a', b', c', p, q$ et r les affixes respectives des points $A, B, C, A', B', C', P, Q$ et R dans un repère orthonormal direct.
 - 4.1) Exprimer a', b' et c' en fonction de a, b et c .
 - 4.2) Montrer que les triangles ABC , $A'B'C'$ et PQR ont le même centre de gravité.

Notion mise en jeu : Nombres complexes et géométrie.

Il est attendu notamment que la candidate ou le candidat sache, pour un nombre complexe, interpréter géométriquement les notions de module et d'argument.