

Préparation à l'oral**Exercice n° 15 - A****Thème : Polynômes****L'exercice**

1. Rappeler le théorème de division euclidienne des polynômes de $\mathbb{R}[X]$.
2. Effectuer la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$ de P par Q lorsque

$$P = X^4 - 4X^3 + 5X^2 - 2X + 5 \quad \text{et} \quad Q = X^2 - X.$$

3. Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que a est racine de P si et seulement si $(X - a)$ divise P .
4. Dans cette question, on cherche à déterminer l'ensemble suivant

$$E = \{P \in \mathbb{R}[X], P(X^2) = (X^3 + 1)P(X)\}.$$

- a) Montrer que le polynôme nul ainsi que le polynôme $X^3 - 1$ sont dans E .
- b) Soit $P \in E$ non nul. Montrer que $\deg(P) = 3$ et que $P(1) = 0$.
- c) Soit $P \in E$ non nul. Montrer que $P'(0) = P''(0) = 0$.
- d) Soit $P \in E$ non nul. En effectuant la division euclidienne de P par $X^3 - 1$, montrer l'existence d'un réel λ tel que $P = \lambda(X^3 - 1)$.
- e) Conclure sur l'ensemble E .

Notion mise en jeu : Arithmétique des polynômes.

Il est attendu notamment que la candidate ou le candidat sache démontrer le théorème de division euclidienne des polynômes.