

Préparation à l'oral**Exercice n° 14 - B****Thème : Arithmétique****L'exercice**

1. Donner la définition d'un nombre premier.
2. Démontrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.
3. Énoncer le théorème de décomposition en facteurs premiers.
4. Les nombres 1, 11, 111, 1111, etc. sont des nombres que l'on appelle rep-units (répétition de l'unité). Ils ne s'écrivent qu'avec des chiffres 1. Ces nombres possèdent de nombreuses propriétés qui passionnent les mathématiciens. On se propose ici d'en découvrir quelques-unes. Pour tout entier k strictement positif, on note N_k le rep-unit qui s'écrit avec k chiffres 1.
 - (a) Citer, en justifiant la réponse, deux nombres premiers inférieurs à 10 n'apparaissant jamais dans la décomposition d'un rep-unit en produit de facteurs premiers.
 - (b) À quelle condition sur k , le nombre 3 apparaît-il dans la décomposition en produit de facteurs premiers du rep-unit N_k ?
 - (c) Pour tout entier k strictement positif, on a : $N_k = \sum_{i=0}^{k-1} 10^i = 1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{k-1}$.
Justifier l'égalité $9N_k = 10^k - 1$.
 - (d) Soit k un entier strictement positif, montrer que $10k \equiv 1 \pmod{7}$ si et seulement si k est multiple de 6. En déduire que 7 divise N_k si et seulement si k est multiple de 6.

Notion mise en jeu : Décomposition en facteurs premiers.

Il est attendu notamment que la candidate ou le candidat sache démontrer le théorème de décomposition en facteurs premiers.