Université de Rennes

Préparation à l'oral

Exercice n° 14 - A

Thème : Probabilités

L'exercice

1. Donner la définition d'une variable aléatoire réelle X sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$. Pour $k \in \mathbb{R}$, expliquer la notation $[X = k]$.
2. Démontrer que si X une variable aléatoire réelle X sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$ alors les $[X = k]$ (pour $k \in X(\Omega)$) forment un système complet d'événements.
3. Donner la définition de la loi de probabilité $\mathbb{P}_X$ de la variable aléatoire X (on parle aussi de probabilité image).
4. Quand dit-on qu'une variable aléatoire suit la loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$?
5. Une urne contient sept boules noires et trois boules blanches. Ces dix boules sont indiscernables au toucher. Une partie consiste à prélever au hasard successivement et avec remise deux boules dans cette urne. On établit la règle de jeu suivante :
   — le joueur perd 9 euros si les deux boules tirées sont de couleur blanche ;
   — le joueur perd 1 euro si les deux boules tirées sont de couleur noire ;
   — le joueur gagne 5 euros si les deux boules tirées sont de couleurs différentes ; on dit dans ce cas là qu'il gagne la partie.

   Soit n un entier tel que $n > 2$. Un joueur joue n parties identiques et indépendantes.

   On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de parties gagnées par le joueur. Donner la loi de la variable X puis déterminer le nombre minimal de parties que le joueur doit jouer afin que la probabilité de gagner au moins une fois soit supérieure à 99 %.

Notion mise en jeu : Loi d'une variable aléatoire.

Il est attendu notamment que la candidate ou le candidat sache démontrer que la loi de probabilité d'une variable aléatoire est une probabilité sur l'espace image.