Université de Rennes

Préparation à l'oral

Exercice n° 13 - B

Thème : Dénombrement

L'exercice

Soient E et F deux ensembles finis. On désigne par $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

1. Soit f une fonction définie sur l'ensemble E, à valeurs dans l'ensemble F. Rappeler la définition des notions suivantes : f est injective, f est surjective.
2. Soit f une fonction de E dans E : démontrer que l'injectivité de f équivaut à sa surjectivité.
3. Démontrer la formule de Pascal : Pour tout entier n et tout entier $k \leqslant n$,
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$
4. Déterminer le cardinal de $\mathscr{P}(E)$.
5. Supposons maintenant que E possède n éléments, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Déterminer le nombre de couples $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$ tels que $A \subset B$.
   (b) Déterminer le nombre de couples $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
   (c) Déterminer le nombre de triplets $(A, B, C) \in \mathscr{P}(E)^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

Notion mise en jeu : Fonctions et partitions d'ensembles.

Il est attendu notamment que la candidate ou le candidat sache expliciter avec des quantificateurs quand une fonction est ou n'est pas injective (respectivement surjective) et donner des contre-exemples à la question 2. dans le cas d'un ensemble infini.