Université de Rennes

# Préparation à l'oral

**Exercice n° 13 - A**

**Thème : Algèbre linéaire**

## L'exercice

On admet les notions d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et de dimension et de sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel. Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Donner la définition de la somme de deux sous-espaces vectoriels $F$ et $G$ de $E$. Dans quel cas dit-on que la somme est « directe » ?
2. Démontrer que la somme de deux sous-espaces vectoriels est un espace vectoriel.
3. Donner la définition d'un endomorphisme de $E$.
4. Donner deux définitions équivalentes d'un projecteur de $E$.
5. Soit $P$ le plan vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ d'équation $x + y + z = 0$. Soit $D$ la droite vectorielle du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ d'équation $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$.
   (a) Vérifier que $\mathbb{R}^3$ est la somme directe de $P$ et $D$.
   (b) Soit $p$ la projection linéaire de $\mathbb{R}^3$ sur $P$ parallèlement à $D$. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de $p$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de $p$ est diagonale.

## Notion mise en jeu : Sommes (directes) de sous-espaces vectoriels.

Il est attendu notamment que la candidate ou le candidat sache donner la dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels (de dimension finie) et démontrer la formule générale de la dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels (de dimension finie).