Université de Rennes

Préparation à l'oral

Exercice n° 12 - B

Thème : Probabilités

L'exercice

1. Rappeler la définition de suite arithmético-géométrique à valeurs dans $\mathbb{R}$.
2. Soit Ω un ensemble fini (un univers fini). Donner la définition de tribu et de probabilité sur Ω.
3. Énoncer la formule des probabilités totales.
4. Démontrer la formule de Bayes en s'appuyant sur la formule des probabilités totales.
5. On dispose de deux urnes U_1 et U_2. L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires. L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires. On effectue des tirages successifs selon les conditions suivantes.
   Pour le premier tirage :
   - on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie : on note sa couleur et on la remet dans l'urne dont elle provient ;
   - si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1 ; sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.

   Pour les tirages suivants :
   - on tire une boule au hasard dans l'urne déterminée par le tirage précédent, on note sa couleur et on la remet dans l'urne dont elle provient ;
   - si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1 ; sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au n-ème tirage est blanche » et on pose $p_n = P(B_n)$.
   (a) Calculer p_1.
   (b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.
   (c) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, l'expression de p_n en fonction de n.

Notion mise en jeu : Formule des probabilités totales.

Il est attendu notamment que la candidate ou le candidat sache proposer une démonstration de la formule des probabilités totales.