Université de Rennes

Préparation à l'oral

Exercice n° 12 - A

Thème : Fonctions

L'exercice

1. Rappeler les définitions de fonction réelle continue, de fonction réelle dérivable et de fonction dérivée sur un intervalle de $\mathbb{R}$.
2. Énoncer le théorème des accroissements finis et en donner sa traduction géométrique.
3. Expliciter la conséquence du théorème des accroissements finis sur la relation entre monotonie et signe de la dérivée.
4. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in]a, b[$. On suppose que f est continue sur $[a, b]$ et que f est dérivable sur $]a, x_0[$ et sur $]x_0, b[$. Démontrer que, si f' admet une limite finie en x_0, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x)$.
5. On considére la fonction g définie par : $g(x) = x^2 \sin(1/x)$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.
   (a) Démontrer que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   (b) On note g' la fonction dérivée de g définie sur $\mathbb{R}$. Déterminer g'.
   (c) La fonction g' admet-elle une limite finie en 0 ?
6. Si une fonction réelle est dérivable sur un intervalle I, peut-on affirmer que sa fonction dérivée est continue sur I ? Justifier.

Notion mise en jeu : Théorème des accroissements finis.

Il est attendu notamment que la candidate ou le candidat sache proposer une démonstration du théorème des accroissements finis.