Polynômes, endomorphismes et matrices

O. Simon, Université de Rennes I

28 octobre 2004

Notations :
Si E et F sont des ensembles, on note E^F l'ensemble des applications de F dans E. Ainsi $E^{\mathbb{N}}$ désigne l'ensemble des suites à valeurs dans E.
On note K un corps commutatif.

1 Rappel sur les polynômes à une variable

On note $K[X]$ l'ensemble des polynômes à une indéterminée à coefficients dans K. Si $P \in K[X]$, on peut le considérer comme un élément de $K^{\mathbb{N}}$ dont tous les termes sont nuls sauf un nombre fini, on peut noter $P = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ou $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, si n est un entier tel que a_i soit nul pour tout $i > n$.

Propriétés 1.1 *On a les propriétés :*
- *$K[X]$ est un anneau commutative, unitaire, intègre pour + et $\times$*
- *$K[X]$ est un K-e.v. de dimension infinie pour + et .(multiplication par un scalaire).*

Ces deux propriétés font de $K[X]$ une K-algèbre commutative, unitaire, intègre.
- *$K[X]$ est un anneau euclidien, donc*
  1. *il est principal*
  2. *il est factoriel*
  3. *il existe une division euclidienne, des PGCD et PPCM*
  4. *l'identité du théorème de Bezout est valide*
  5. *l'algorithme d'Euclide fonctionne*

Etant donnés un polynôme $P \in K[X]$ et un élément b d'une K-algèbre A, on peut calculer $P(b)$ avec les opérations de A. On a deux façons d'interpréter ce calcul.

1.1 Fonction polynomiale

Définition 1.2 *Pour toute K-algèbre A unitaire et tout $P \in K[X]$, on a une application, $\tilde{P}$, de A dans A, pour tout $b \in A$, $\tilde{P}(b) = P(b)$*

$$\tilde{P} : \quad \begin{aligned} A &\longrightarrow A \\ b &\longrightarrow P(b) \end{aligned}$$

C'est la fonction polynomiale associée à P (Elle n'est ni linéaire, ni un homorphisme d'anneaux).
Ceci définit une application de $K[X]$ dans A^A, K-algèbre des applications de A dans A :

$$\begin{aligned} K[X] &\longrightarrow A^A \\ P &\longrightarrow \tilde{P} \end{aligned}$$

Cette application est un homomorphisme de K-algèbres, son image est la K-algèbre des fonctions polynomiales sur A à coefficients dans K. Il ne faut pas confondre polynôme et fonction polynomiale.

Proposition 1.3 *L'application de $K[X]$ dans K^K, $P \longrightarrow \tilde{P}$, est injective si et seulement si K est infini.*

A fortiori, il n'y a pas injectivité pour une K-algèbre A quelconque.
Contre-exemple : $A = K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

1.2 Morphisme d'évaluation

Théorème 1.4 *Pour tout anneau A unitaire, tout homomorphisme d'anneau, h, de K dans A et tout $b \in A$, tel que b commutte avec les éléments de $h(K)$, il existe un unique homomorphisme d'anneaux, h_b, de $K[X]$ dans A tel que,*

$$\textit{pour tout } k \in K: \; h_b(k) = h(k), \quad h_b(X) = b$$

Si $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, alors $h_b(P) = \sum_{i=0}^{n} h(a_i) b^i$, on note $P(b) = h_b(P)$
C'est la propriété universelle de l'anneau des polynômes.

$$\begin{array}{ccc} & i & \\ K & \longrightarrow & K[X] \\ h \searrow & & \swarrow h_b \\ & A & \end{array}$$

Exemples :

1. $A = K$, si $h = I_K$, on obtient la fonction évaluation des polynômes en b : $h_b(P) = P(b)$.
2. $A = M_n(K)$, si $h(k) = k.I_n$, $b = M$ une matrice, on obtient les polynômes de matrices en M, $h_M(P) = P(M) = \sum_{i=0}^{n} a_i M^i$, avec les opérations sur les matrices.
3. $A = L(E, E)$, où E est un K-e.v., si $h(k) = k.I_E$, $b = f \in L(E, E)$,on obtient les polynômes d'endomorphismes en f, $h_f(P) = P(f) = \sum_{i=0}^{n} a_i f^i$, avec les opérations sur les endomorphismes, somme et composition.

Définition 1.5 *Etant donné $b \in A$, on appelle polynôme annulateur de b tout polynôme P tel que $P(b) = 0$.*

On a l'ensemble des polynômes annulateurs de b :

$$Ker(h_b) = \{P \mid P(b) = 0\}$$

c'est un idéal de $K[X]$, il est principal. Donc il existe un polynôme unitaire Q_b tel que

$$Ker(h_b) = (Q_b)$$

Ce polynôme est unique. Tout polynôme annulateur est multiple de Q_b.

Définition 1.6 *Etant donné $b \in A$, on appelle polynôme minimal de b le polynôme unitaire Q_b, générateur de l'idéal $Ker(h_b)$.*

2 Anneaux des matrices carrées

On considère $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient p un entier positif, $A = M_p(K)$.

Définition 2.1 *On définit un découpage par blocs d'une matrice M de A, en écrivant p comme une somme d'entiers strictement positifs, $p = p_1 + p_2 + \ldots + p_r$ et en découpant M en matrices M_{ij} carrées ou rectangulaires, de taille $p_i \times p_j$:*

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \ldots & M_{1r} \\ M_{21} & \ldots & & \ldots \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ M_{r1} & \ldots & \ldots & M_{rr} \end{pmatrix}$$

Les blocs M_{ii} sont appelés blocs diagonaux.
On dit que la matrice est diagonale par blocs, s'il existe un découpage tel que, pour tout couple (i, j), si $i \neq j$, alors $M_{ij} = 0$

Proposition 2.2 *Si*

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ 0 & M_{22} \end{pmatrix}$$

alors, $det(M) = det(M_{11}) \times det(M_{22})$.

Définition 2.3 *Soient $M, N \in A$, on dit que* <u>*M est semblable à N*</u> *s'il existe $P \in A$, inversible, telle que $N = P^{-1}MP$.*

C'est une relation d'équivalence sur $M_p(K)$.

Définition 2.4 *Soit $M \in A$, on dit que M est* <u>*diagonalisable*</u> *s'il existe $D \in A$, diagonale telle M soit semblable à D.*

Définition 2.5 *Soient $M \in A$, on dit que* <u>*M est triangularisable(trigonalisable)*</u> *s'il existe $T \in A$, triangulaire, telle M soit semblable à T.*

Proposition 2.6 *Toute matrice triangulaire supérieure est semblable à une matrice triangulaire inférieure. (Monier P.75)*

Proposition 2.7 *Toute matrice T triangulaire peut s'écrire*

$$T = D + N$$

où D est diagonale et N nilpotente.

En général, $DN \neq ND$.

3 Polynômes d'endomorphismes

Soient E un K-e.v., avec $K = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ et u un endomorphisme de E. Si B est une base de E, on notera $M_B(u)$ la matrice de u dans cette base.

Proposition 3.1 *(sur les itérés)*
Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a :

$$\{0\} \subset \ldots \subset Im\ u^{i+1} \subset Im\ u^i \subset \ldots \subset Im\ u \subset Im\ u^0 = E$$

$$\{0\} = Ker\ u^0 \subset Ker\ u \subset \ldots \subset Ker\ u^i \subset Ker\ u^{i+1} \subset E$$

Si $Im\ u^{k+1} = Im\ u^k$, alors pour tout $i \geq k$ on a $Im\ u^i = Im\ u^k$.
Si $Ker\ u^{k+1} = Ker\ u^k$, alors pour tout $i \geq k$ on a $Ker\ u^i = Ker\ u^k$.
Lorsque E est de dimension finie, ces deux suites sont stationnaires de même longueur.

Si $dimE = p$, pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a $dimIm\ u^i + dimKer\ u^i = p$.

Définition 3.2 *Soit u un endomorphisme de E, s'il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $Im\ u^i = 0$, on dit que u est* <u>*nilpotent*</u>*. On appelle ordre de nilpotence de u le plus petit entier i tel que $u^i = 0$.*

Proposition 3.3 *Soient P, Q_1, Q_2 dans $K[X]$ tels que $P = Q_1 \times Q_2$, alors*

1. *$P(u) = Q_1(u)oQ_2(u) = Q_2(u)oQ_1(u)$*
2. *si Q_1 et Q_2 sont premiers entre eux, alors*

$$KerP(u) = KerQ_1(u) \oplus KerQ_2(u).$$

Démonstration en exercice.

Lemme 3.4 *Soient $E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_k$ où les sous-espaces E_i sont stables par u. Si $B = B_1 \cup \ldots \cup B_k$ réunion des B_i base de E_i, alors*

$$M_B(u) = \begin{pmatrix} M_1 & & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & \ldots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & M_k \end{pmatrix}.$$

où $M_i = M_{B_i}(u|_{E_i})$.

On a une matrice diagonale par blocs.

Théorème 3.5 *(des noyaux) Soit $P = \prod_{i=1}^{k} Q_i$ avec pour tout $i \neq j$, Q_i et Q_j premiers entre eux, alors*

$$KerP(u) = \oplus_{i=1}^{k} KerQ_i(u)$$

Si $P(u)$ est un polynôme annulateur de u, il existe une base de E, dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs.

Soit $B = B_1 \cup \ldots \cup B_k$ une base de E réunion des B_i base de $KerQ_i(u)$.
On a $E = KerP(u)$ et $KerQ_i(u)$ est stable par u, en effet, si $x \in KerQ_i(u)$, on a

$$Q_i(u)(u(x)) = u(Q_i(u)(x)) = u(0) = 0$$

donc on a les blocs diagonaux M_{ii} qui sont les matrices de la restriction de u à $KerQ_i(u)$. Les autres blocs sont nuls.

4 Réduction des matrices et des endomorphismes

Soit E un K-e.v. de dimension p. Etant donnée une base de E, $(e_i)_{i=1,\ldots,p}$, on a une bijection entre l'ensemble des endomorphismes de E et $M_p(K)$.
Soit u un endomorphisme de E et M la matrice de u dans une base $(e_i)_{i=1,\ldots,p}$. Si on choisit une autre base $(f_i)_{i=1,\ldots,p}$ de E, on obtient une autre matrice N pour u. On a le shéma suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} & I_E & & u & & I_E & \\ E & \longrightarrow & E & \longrightarrow & E & \longrightarrow & E \\ (f_i) & P & (e_i) & M & (e_i) & P^{-1} & (f_i) \end{array}$$

Ce qui donne la relation matricielle :

$$N = P^{-1}MP$$

La matrice P est appelée la matrice de passage de la base (e_i), (ancienne) à la base (f_i), (nouvelle). Ses colonnes sont les vecteurs de la nouvelle base exprimés dans l'ancienne.

Définition 4.1 *On dit qu'un endomorphisme u est diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice soit diagonale.*
Ce qui est équivalent à dire que sa matrice dans une base donnée est diagonalisable.

Définition 4.2 *On dit qu'un endomorphisme u est triangularisable(trigonalisable) s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice soit triangulaire.*
Ce qui est équivalent à dire que sa matrice dans une base donnée est triangularisable.

Définition 4.3 *On appelle valeur propre de u, respectivement valeur propre de M, tout $\lambda \in K$ tel qu'il existe un vecteur non nul $v \in E$ et $u(v) = \lambda v$, respectivement $Mv = \lambda v$.*
On appelle vecteur propre de u, (resp. de M), tout vecteur $v \in E$ tel que

1. *$v \neq 0$*
2. *il existe $\lambda \in K$, tel que $u(v) = \lambda v$, (resp. $Mv = \lambda v$)*

Définition 4.4 *On appelle sous-espace propre associé à une valeur propre λ le s.e.v. :*

$$E_\lambda = \{v | u(v) = \lambda v\} = Ker(u - \lambda I)$$

Proposition 4.5 *Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ sont des valeurs propres distinctes de u, alors les sous-espaces propres associés, E_{λ_i} sont en somme directe.*

Conséquences du théorème des noyaux, (les polynômes $X - \lambda_i$ sont premiers entre eux deux à deux)

Proposition 4.6 **Réduction 1 :** *L'endomorphisme u est diagonalisable sur K si l'une des conditions équivalentes est vérifiées :*

1. *il existe une base de E formée de vecteurs propres de u.*
2. *la somme des sous-espaces propres est égale à E*
3. *la somme des dimensions des s.e.p. est égale à $dim(E)$*

Définition 4.7 *Si $M \in A$, on définit le polynôme caractéristique P_M de M :*

$$P_M(X) = det(M - XI_p)$$

C'est un polynôme de degré p.
Etant données une base de E, $(e_i)_{i=1,\dots,p}$, et M la matrice de u dans cette base, le polynôme caractéristique de u est défini par

$$P_u(X) = P_M(X)$$

La définition de P_u est indépendante de la base choisie.

Proposition 4.8 *Les valeurs propres de u (resp. de M), sont les racines dans K de son polynôme caractéristique.*

On a

$$Ker(u - \lambda I_E) \neq \{0\} \iff u - \lambda I_E \textit{ non inversible} \iff det(u - \lambda I_E) = 0$$

Théorème 4.9 **Réduction 2 :** *On a l'équivalence :*

1. *le polynôme P_u est scindé dans $K[X]$*
2. *l'endomorphisme u est triangularisable*

Démonstration par récurrence sur p. (Monier P.76, Grifone p. 216)
Exemple : Dans $\mathbb{C}$, toute matrice est triangularisable.

Définition 4.10 *Si $\lambda \in K$ est valeur propre d'une matrice ou d'un endomorphisme, la multiplicité de λ comme racine du polynôme caractéristique est appelée multiplicité de la valeur propre.*

Proposition 4.11 *Si α est la multiplicité de la valeur propre λ, alors*

$$1 \leq dim E_\lambda \leq \alpha$$

- Par définition de λ, on a $E_\lambda \neq \{0\}$, donc $dim E_\lambda \geq 1$
- Si $\{f_1, \dots, f_k\}$ est une base de E_λ, $k \leq p$, d'après le théorème de la base incomplète, il existe $\{f_{k+1}, \dots, f_p\}$ tel que $(f_i)_{i=1,\dots,p}$ soient une base de E. On écrit la matrice de u dans cette base.

$$N = \begin{pmatrix} \lambda & \dots & 0 & \\ 0 & \lambda & 0 & B \\ 0 & \dots & \lambda & \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & C \\ 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

On a $P_u(X) = det(N - XI) = (\lambda - X)^k det(C - XI)$, donc $(X - \lambda)^k$ divise $P_u(X) = (X - \lambda)^\alpha Q(X)$, où $Q(X)$ est premier avec $X - \lambda$, donc $k \leq \alpha$.

Définition 4.12 *Si $\lambda \in K$ est valeur propre d'un endomorphisme u dont la multiplicité est α, on appelle sous-espace caractéristique de u associé à λ le s.e.v. $Ker(u - \lambda I_E)^\alpha$.*

Théorème 4.13 *de Cayley-Hamilton*

$$P_M(M) = 0_p$$

Donc le polynôme minimal de M est un diviseur de son polynôme caractéristique.
Exercice : Si $\lambda \in K$ est valeur propre d'une matrice M, (resp. d'un endomorphisme u), alors λ est racine de tout polynôme annulateur de M (resp. u).
En particulier, toute valeur propre d'un endomorphisme est racine de son polyôme minimale.

Théorème 4.14 *Soit u un endomorphisme de E tel que P_u est scindé et soit Q_u son polynôme minimal. Si $P_u = (-1)^p \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ dans $K[X]$, avec pour tout $i \neq j, \lambda_i \neq \lambda_j$, alors*

- $\sum_{i=1}^k \alpha_i = p$
- $Q_u(X) = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{\omega_i}, \quad 1 \leq \omega_i \leq \alpha_i$
- $E = Ker P_u(u) = \oplus_{i=1}^k Ker(u - \lambda_i I_E)^{\alpha_i}$
- $E = Ker Q_u(u) = \oplus_{i=1}^k Ker(u - \lambda_i I_E)^{\omega_i}$

C'est une conséquence du théorème des noyaux et du théorème de Cayley-Hamilton.

Dans la suite, on note $F_i = Ker(u - \lambda_i I_E)^{\alpha_i} = Ker(u - \lambda_i I_E)^{\omega_i}$, égalité déduite de la propriété des itérés. On a en général $\alpha_i \neq \omega_i$.

Théorème 4.15 **Réduction 3 :** *Réduction selon les sous-espaces caractéristiques.*
Soit u un endomorphisme de E tel que P_u est scindé, $P_u = (-1)^p \prod_{i=1}^{k}(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$. Il existe une base de E, $B = B_1 \cup \ldots \cup B_k$ réunion des B_i base de F_i telle que

$$M_B(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & 0 & 0 & \\ 0 & \ddots & \ldots & 0 & 0 & \\ 0 & & \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & & \lambda_2 & * & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ddots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & & \lambda_k \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est diagonale par blocs de taille $\alpha_i \times \alpha_i$, ces blocs étant des matrices triangulaires, égales à $M_{B_i}(u|_{F_i})$

Grifone p. 231
L'unicité de la factorisation de P_u implique que $dimF_i = \alpha_i$.

Corollaire 4.16 *Si F est le sous-espace caractéristique de u associé à λ, il est stable par u et il existe une base de F dans laquelle la matrice de la restriction de u à F soit triangulaire. Si α et ω sont les puissances de $(X - \lambda)$ dans P_u et Q_u respectivement, on a*

- *$f = u_{|F} - \lambda I_{|F}$ est nilpotent d'ordre ω.*
- *$dimF = \alpha$*
- *en notant, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $N_k = Ker(u - \lambda I_E)^k$, on a*

$$\{0\} = N_0 \subset N_1 \subset \ldots \subset N_\omega = \ldots = F$$

Théorème 4.17 **Réduction 4 :** *L'endomorphisme u est diagonalisable sur K si l'une des conditions équivalentes est vérifiée :*

1. *P_u est scindé dans $K[X]$, $P_u = (-1)^p \prod_{i=1}^{k}(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ et $dimE_{\lambda_i} = \alpha_i$*
2. *il existe un polynôme annulateur de u scindé et à racines simples*
3. *le polynôme minimal est $Q_u(X) = \prod_{i=1}^{k}(X - \lambda_i)$*

5 Décomposition de Dunford

Soit E un K-e.v. de dimension p et u un endomorphisme de E. Etant donnée une base de E, $(e_i)_{i=1,\ldots,p}$ et M la matrice de u dans cette base.

Théorème 5.1 *Si le polynôme P_u est scindé dans $K[X]$, alors l'endomorphisme u peut se décomposer de manière unique tel que*

1. $u = d + n$
2. *d est diagonalisable*
3. *n est nilpotent,*
4. $dn = nd$.

De plus, d et n sont des polynômes en u.

Démonstration : voir Monier, Franchini.

Démonstration :
Si $P_u = (-1)^p \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$, on a $E = \oplus_{i=1}^k F_i$, où $F_i = Ker(u - \lambda_i I_E)^{\alpha_i}$ est le sous-espace caractéristique associé à λ_i.
On considère $f_i = u_{|F_i}$ et $n_i = f_i - \lambda_i I_{|F_i}$ sur F_i.
Pour tout $v \in E$, il existe $(v_1, \ldots, v_k)$ unique tel que

$$v = v_1 + \ldots + v_k, \quad v_i \in F_i$$

on pose

$$d(v) = \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i, \quad n(v) = \sum_{i=1}^k n_i(v_i)$$

Comme F_i est stable par f_i et n_i, $n(v) = \sum_{i=1}^k n_i(v_i)$ est l'écriture dans la décomposition en somme directe, on a $n^2(v) = \sum_{i=1}^k n_i(n_i(v_i))$. Dans une base réunion de bases des F_i, la matrice de d est diagonale,
$P_d = (-1)^p \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$, alors $P_d = P_u$ et d est diagonalisable.
En notant $\alpha = Max_{i=1,\ldots,k}\{\alpha_i\}$, on a $n^\alpha = 0$, ainsi n est nilpotente.
D'autre part, on vérifie que

- $u = d + n$
- $dn = nd$

Les endomorphismes construits ci-dessus, d et n, sont des polynômes en u. En effet, si $P_u(X) = (X - \lambda_i)^{\alpha_i} Q_i(X)$, alors les Q_i sont premiers dans leur ensemble. L'identité de Bezout donne l'existence de C_i tels que

$$\sum_{i=1}^k C_i Q_i = 1, \quad \sum_{i=1}^k C_i(u) Q_i(u) = I_E.$$

Pour tout $v \in E$, $(u - \lambda_i)^{\alpha_i} C_i(u) Q_i(u)(v) = C_i(u) P_u(u) = 0$, donc

$$C_i(u) Q_i(u)(v) \in F_i, \; C_i(u) Q_i(u)(v) = v_i.$$

Ainsi $d = \sum_{i=1}^k \lambda_i C_i(u) Q_i(u)$ est un polynôme en u, il en est de même de $n = u - d$.
Pour montrer l'unicité, on utilise le couple construit ci-dessus et un autre couple (d', n') vérifiant les quatre propriétés. Le fait que d et n commutent ainsi que d' et n' joue un rôle important.
On a la traduction matricielle de ce théorème.

Théorème 5.2 *Si le polynôme P_M est scindé dans $K[X]$, alors la matrice M peut se décomposer de manière unique tel que*

1. $M = D + N$
2. *D est diagonalisable*
3. *N est nilpotent,*
4. $DN + ND$.

De plus, D et N sont des polynômes en M.

Remarques :

1. Dans ces deux théorèmes, l'unicité est valable si les 4 conditions sont respectées.
2. Dans la traduction matricielle, D est une matrice diagonalisable et non forcément diagonale.

Exemple :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

On a une décomposition de Dunford de M est $M + 0_2$.
On peut aussi écrire :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mais $\begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ne commutent pas.

Corollaire 5.3 *Si le polynôme P_u est scindé dans $K[X]$, alors il existe une base de E dans laquelle l'endomorphisme u admet une matrice diagonale par blocs avec des blocs triangulaires.*

Avec les notations du théorème 5.1, F_i est stable par n_i, son polynôme caractéristique est scindé, donc la matrice de n_i est trigonalisable.

6 Mise sous forme de Jordan

On peut améliorer l'étude de u avec la mise sous forme de Jordan.

Définition 6.1 *On appelle <u>bloc de Jordan</u> d'ordre k, une matrice $J(\lambda) \in M_k(K)$ de la forme*

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_k + N_k$$

où $N_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On dit qu'une matrice M est <u>sous forme de Jordan</u> si elle est diagonale par blocs et que les blocs diagonaux sont des blocs de Jordan.

Théorème 6.2 *(de Jordan)*

- *Toute matrice M telle que P_M est scindé est semblable à une matrice sous forme de Jordan*
- *Pour tout endomorphisme u tel que P_u est scindé, il existe une base de E dans laquelle u admet une matrice sous forme de Jordan*

Proposition 6.3 *La forme de Jordan d'une matrice donne la décomposition de Dunford.*

En effet, on a la décomposition de chaque bloc de Jordan en $J_k = D_k + N_k$ et la matrice N_k est nilpotente d'ordre $k-1$, D_k est de la forme λI_k, donc $D_k.N_k = N_k.D_k$.

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & J_{r-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & D_{r-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & D_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & N_2 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & N_{r-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & N_r \end{pmatrix}$$

Comme les blocs se correspondent et commuttent, on a $DN = ND$.

Résumé

Soient $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}, A = M_p(K), M \in A$, E un K-e.v. de dimension p et u un endomorphisme de E admettant M comme matrice dans une base donnée.

$$P_M(X) = det(M - XI_p) \in K[X]$$

1. **Si** $K = \mathbb{R}$, $M \in M_p(\mathbb{R})$, alors $P_M(X) = det(M - XI_p) \in \mathbb{R}[X]$.
2. **Si** $K = \mathbb{R}$**, s'il existe des valeurs propres non réelles**, le polynôme P_M n'est pas scindé : la matrice M n'est ni trigonalisable, ni diagonalisable et n'admet pas de décomposition de Dunford.
3. **Si** $K = \mathbb{C}$ ou **si** $K = \mathbb{R}$ **et toutes les valeurs propres sont réelles**, le polynôme P_M est scindé : on a la factorisation
$$P_M(X) = \prod_{i=1}^{k}(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$$
avec pour tout $i \neq j, \lambda_i \neq \lambda_j$. Alors
M est toujours **trigonalisable**, avec les valeurs propres apparaissant sur la diagonale autant de fois que leur multiplicité.
M est **diagonalisable** si l'une des conditions équivalentes est vérifiée :
– le polynôme minimal n'a que des racines simples,
– il existe un polynôme annulateur de M n'admettant que des racines simples,
– $E = \oplus_{i=1}^{k} Ker(u - \lambda_i I_E)$,
– pour tout $i = 1, \ldots, k$, le sous-espace propre associé à λ_i est égal au sous-espace caractéristique,
– il existe une base de E formée de vecteurs propres de M.
4. Si $M \in M_p(\mathbb{R})$, $P_M(X) = det(M - XI_p) \in \mathbb{R}[X]$, le polynôme minimal de M est le même dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

Références

[Escofier] Toute l'algèbre du 1er cycle. Jean-Pierre Escofier. Dunod 2002

[Franchini] Algèbre, Mathématiques Spéciales. Ellipses 1999

[Gostiaux] Cours de mathématiques spéciales 1. Algèbre. Bernard Gostiaux. PUF

[Grifone] Algèbre linéaire. Joseph Grifone. Cepadues-Editions, 1990

[Hiriart-Urruty] Algèbre linéaire et bilinéaire. Exercices. Cepadues-Editions, 1988

[Lelong] Cours de mathématiques, Tome 1, Algèbre. J.Lelong-Ferrand, J.M.Arnaudiès. Dunod Université.

[Monier] Nouveau cours de mathématiques, Tome 6, Algèbre 2, cours et 400 exercices corrigés. Jean-Marie Monier. Dunod 1996

[Schwartz] Mathématiques pour la licence, Algèbre. Lionel Schwartz. Dunod 1998