

MASTER 1
Métiers de l'Education, de l'Enseignement et de la Formation
mention Second degré - Parcours Mathématiques

Licence 3 de mathématiques - PCAP

Écrit blanc du 21/02/2026

Durée : 4 heures

*Calculatrice avec mémoire alphanumérique et/ou avec écran graphique qui dispose d'une fonctionnalité « **mode examen** » autorisée conformément à la circulaire MENH2119786C du 17 juin 2021.*

Elle doit répondre aux spécificités suivantes :

- *la neutralisation temporaire de l'accès à la mémoire de la calculatrice ou l'effacement définitif de cette mémoire ;*
- *le blocage de toute transmission de données, que ce soit par Wifi, Bluetooth ou par tout autre dispositif de communication à distance ;*
- *la **présence d'un signal lumineux clignotant** sur la tranche haute de la calculatrice, attestant du passage au « mode examen » ;*
- *la non-réversibilité du « mode examen » durant toute la durée de l'épreuve.*

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

Ce sujet est formé de trois parties et comporte un document joint.

La clarté et la précision des raisonnements, la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Tournez la page S.V.P.

Partie 1 : Exercices de critique et rédaction mathématique

Pour chacun des exercices ci-après une réponse est fournie.

1. Les réponses fournies sont-elles exactes ? Justifier et préciser les éléments qui permettent de repérer les erreurs.
2. Quelles critiques peut-on faire à la rédaction de chaque réponse proposée ? Justifier.
3. Rédiger avec soin une réponse correcte pour chacun des exercices proposés.

Exercice 1

On considère l'application f qui à tout nombre complexe z associe le nombre complexe $f(z)$ défini par :

$$f(z) = e^y (\cos(\pi x) + i \sin(\pi x))$$

où x et y désignent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de z .

Résoudre l'équation $f(z) = i$, puis l'équation $f(z) = Z$, où Z est un complexe donné.

Réponse

$f(z) = i \Leftrightarrow e^y \cos(\pi x) + i e^y \sin(\pi x) = i$, donc $e^y \cos(\pi x) = 0$ et $e^y \sin(\pi x) = 1$, en égalant les parties réelles et imaginaires.

La première équation donne $y = 0$ et $\pi x = \frac{\pi}{2}$, donc $x = \frac{1}{2}$ et $y = 0$.

Quand on remplace dans l'autre équation, on trouve : $1 \times \sin \frac{\pi}{2} = 1$: c'est vrai, donc la solution est $z = \frac{1}{2} + i \times 0 = \frac{1}{2}$.

$f(z) = Z \Leftrightarrow e^y \cos(\pi x) + i e^y \sin(\pi x) = a + ib$, si $Z = a + ib$. Donc $e^y \cos(\pi x) = a$ et $e^y \sin(\pi x) = b$.
 $e^y \cos(\pi x) = a \Leftrightarrow e^y = a$ et $\pi x = 0$, donc $y = \ln a$ et $x = 0$.

En reportant, on a : $e^{\ln a} \sin 0 = b$, ce qui donne $0 = b$. Donc b est nul et la solution de l'équation est $z = (\ln a)i$.

Exercice 2

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n \geq n$.
2. En déduire les variations et la limite de la suite (u_n) .

Réponse

1. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n$.

- Initialisation : $u_0 \geq 0$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

- Hérédité : On suppose $\mathcal{P}_k$ vraie c'est-à-dire $u_k \geq k$

$$\text{Alors } u_{k+1} \geq k \Leftrightarrow 3u_k - 2k + 3 \geq k \Leftrightarrow 3u_k + 3 \geq 3k \Leftrightarrow u_k \geq k$$

- Bilan : $\mathcal{P}_0$ est vraie, et pour tout k $\mathcal{P}_k \Rightarrow \mathcal{P}_{k+1}$. Donc $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n .

2. On a montré que $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \geq n$ donc la suite (u_n) est croissante. Comme elle ne peut pas converger vers un ℓ fini, elle converge donc vers $+\infty$.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 3

On considère l'équation différentielle

$$(E) : y'' - 2y' + y = 8e^x$$

où y est une fonction de la variable réelle x , définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

- 1) Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E_0) : y'' - 2y' + y = 0$.
- 2) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 4x^2e^x$. Démontrer que la fonction h est une solution particulière de l'équation différentielle (E) .
- 3) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) .

Réponse

1) On reconnaît $ax'' + bx' + cx = 0$ avec $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 = 0$$

donc $x = \frac{b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$.

On sait alors que $f(t) = (\lambda t + \mu)e^t$.

2) $h'(x) = 8xe^x$ et $h''(x) = 8e^x$.

$$8e^x - 2 \times 8xe^x + 4x^2e^x =$$

On doit trouver 0 mais ça ne marche pas. Je prends le résultat pour la question 3.

3) $y'' - 2y' + y = 8e^x = h''(x) - 2h'(x) + h(x)$

donc $y'' - h''(x) - 2y' + 2h'(x) + y - h(x) = 0$

donc $y = (\lambda t + \mu)e^t + 4x^2e^x$ c'est les solutions de l'équation.

Tournez la page S.V.P.

Partie 2 : Questions sur le document joint au sujet

Les questions ci-dessous portent sur le document 1 joint qui aborde la notion d'intégrale généralisée d'une fonction continue sur un intervalle. Les résultats du document 1 sont utilisables sans démonstration (sauf si le sujet exige une démonstration).

1. Définition et premières propriétés

Question 1. Adapter la définition 1 au cas d'une fonction continue sur l'intervalle $]a, b]$ (b désignant un réel et a un réel ou $-\infty$).

Question 2. Montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ est convergente. Donner la valeur de cette intégrale.

Question 3. Montrer que la fonction $F : x \mapsto x \ln x - x$ est une primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction $f : x \mapsto \ln x$. En déduire que l'intégrale généralisée $\int_0^1 \ln t dt$ est convergente. Donner la valeur de cette intégrale.

Question 4. La démonstration de la remarque 1 est un peu succincte. . . Reprendre cette démonstration en détaillant les différents arguments.

Question 5. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit $a \in]0, +\infty[$. Montrer que l'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Question 6. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit $a \in]0, +\infty[$. Montrer que l'intégrale $\int_0^a \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

Question 7. Démontrer le point 5) de la proposition 1 (intégration par parties).

2. Cas des fonctions réelles positives

Question 8. Démontrer la remarque 2.

Question 9. Soient f et g deux fonctions définies sur $[a, b[$ telles que $f(x) \underset{x \rightarrow b}{\sim} g(x)$. On suppose en outre f positive sur $[a, b[$.
Montrer l'existence d'un réel α tel que

$$\forall t \in [\alpha, b[\quad \frac{1}{2}g(t) \leq f(t) \leq \frac{3}{2}g(t)$$

Démontrer alors le théorème d'équivalence (à l'aide du théorème de comparaison).

Tournez la page S.V.P.

Question 10. Montrer que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt$ est divergente.

Question 11. On considère une fonction f continue sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

a) On suppose que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Montrer l'existence d'un réel $\alpha > 1$ tel que

$$\forall t \in [\alpha, +\infty[\quad f(t) \geq 1$$

En déduire que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ est divergente.

b) On suppose l'existence d'un réel $\ell > 0$ tel que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ est divergente.

c) On suppose que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ est convergente. En déduire que la seule limite possible pour f en $+\infty$ est 0.

3. Convergence absolue

Question 12. On considère l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

a) Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ est absolument convergente.

b) Soit $X > 1$. Montrer que $\int_1^X \frac{\sin t}{t} dt = -\frac{\cos X}{X} + \cos 1 - \int_1^X \frac{\cos t}{t^2} dt$.

c) En déduire la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

d) On considère la fonction

$$\begin{aligned} G : [1, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_1^x \frac{|\sin t|}{t} dt \end{aligned}$$

i) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $G((n+1)\pi) - G(n\pi) \geq \int_0^\pi \frac{\sin u}{\pi + n\pi} du$.

$$\text{En déduire que } G((n+1)\pi) \geq G(\pi) + \sum_{k=1}^n \frac{2}{(k+1)\pi}.$$

(On pourra faire intervenir une somme télescopique.)

ii) Démontrer que G est croissante sur $\mathbb{R}^+$. En déduire alors que $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = +\infty$.

iii) Quelle conséquence cela a-t-il pour l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$?

Tournez la page S.V.P.

Partie 3 : Un espace de suites

Soit a un nombre réel. On considère les suites réelles $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant la relation

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+3} = (a+3)u_{n+2} - (3a+2)u_{n+1} + 2au_n. \quad (1)$$

On note E_a l'ensemble des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant (1).

Pour toute suite $u \in E_a$ et tout entier naturel n , on note $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

On considère enfin l'application θ définie par :

$$\theta : \begin{cases} E_a & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \longmapsto & U_0 = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Question A. Rappeler les définitions des lois (addition et multiplication) qui font de l'ensemble des suites réelles un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Question B. Démontrer que E_a est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles.

Question C. Démontrer que θ est une application linéaire.

Question D. Démontrer que θ est une application bijective.

Question E. En déduire la dimension de l'espace-vectoriel E_a .

Fin de l'épreuve.

Document joint

Intégrales généralisées

L'intégrale de Riemann a été définie notamment pour des fonctions continues sur un segment.

On souhaite étendre cette notion à des fonctions définies sur un intervalle quelconque.

On considère une fonction f continue de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$ où b désigne un réel ou $+\infty$. La fonction f est alors intégrable sur tout segment $[a, x]$ inclus dans $[a, b[$.

Dans toute la suite, on considèrera une fonction réelle f continue sur l'intervalle $[a, b[$.

Remarque :

- On pourrait procéder à la même étude avec f continue sur $]a, b]$.
- On pourrait aussi le faire avec l'intervalle $]a, b[$ en divisant l'étude en deux : d'abord sur $]a, c]$ puis sur $[c, b[$ avec $c \in]a, b[$.

1 - Définition et premières propriétés

Définition 1 On dit que *l'intégrale* de f sur $[a, b[$ **converge** si la fonction

$$\begin{aligned} I_f : [a, b[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_a^x f(t) dt \end{aligned}$$

admet une limite finie quand x tend vers b (à gauche).

Si tel est le cas, on note indifféremment $\int_a^b f(t) dt$, $\int_a^b f$ ou $\int_{[a,b[}$ cette limite, que l'on appelle **intégrale généralisée** de f sur $[a, b[$.

Dans le cas contraire on dit que *l'intégrale* $\int_a^b f(t) dt$ **diverge**.

Remarque 1

Si f est continue sur le segment $[a, b]$ alors on a :

$$\forall x \in [a, b[\quad \left| \int_a^x f - \int_a^b f \right| = \left| \int_b^x f \right| \leq M |b - x|$$

où M est un majorant de $|f|$ sur $[a, b]$. Donc $\lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f$ existe et vaut $\int_a^b f$.

Autrement dit, l'intégrale de f coïncide alors avec son intégrale généralisée.

Exemples

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit $a \in]0, +\infty[$.

- L'intégrale de Riemann $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$
- L'intégrale de Riemann $\int_0^a \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

La proposition suivante énonce quelques propriétés des intégrales généralisées. Ces propriétés se démontrent en utilisant les propriétés analogues des intégrales sur un segment et en passant à la limite.

Proposition 1

On considère ici deux fonctions f et g continues sur l'intervalle $[a, b[$.

- 1) *Linéarité* : Si les intégrales de f et g sur $[a, b[$ convergent, alors pour tous réels λ et μ l'intégrale de $\lambda f + \mu g$ sur $[a, b[$ converge et $\int_a^b [\lambda f(t) + \mu g(t)] dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt$.
- 2) *Positivité* : Si $f \geq 0$ sur $[a, b[$ et si $\int_a^b f(t) dt$ converge, alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$.
- 3) *Comparaison* : Si $f \leq g$ sur $[a, b[$ et si les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ convergent, alors $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$.
- 4) *Relation de Chasles* : Si $\int_a^b f(t) dt$ converge, alors $\int_c^b f(t) dt$ converge pour tout $c \in [a, b[$ et $\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$.
- 5) *Intégration par parties* : Si u et v sont de classe C^1 sur $[a, b[$, si $\int_a^b v(t) u'(t) dt$ converge et si $u(x)v(x)$ admet une limite finie quand x tend vers b , alors l'intégrale $\int_a^b u(t) v'(t) dt$ converge et on a :

$$\int_a^b u(t) v'(t) dt = \lim_{x \rightarrow b} u(x)v(x) - u(a)v(a) - \int_a^b v(t) u'(t) dt.$$

2 - Cas des fonctions réelles positives

Dans tout le paragraphe, on supposera f continue sur $[a, b[$, à valeurs réelles, et positive sur $[a, b[$.

Proposition 3

Soit f une fonction réelle continue sur $[a, b[$ et positive. Alors l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge si et seulement si la fonction $x \in [a, b[\mapsto \int_a^x f(t) dt$ est majorée.

Démonstration

On introduit $I_f(x) = \int_a^x f(t) dt$ pour $x \in [a, b[$. Comme f est positive, la fonction I_f est croissante, en effet $I_f(y) - I_f(x) = \int_a^y f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^y f(t) dt \geq 0$ pour $y \geq x$. Par conséquent, $I_f(x)$ admet une limite quand x tend vers b si et seulement si I_f est majorée.

Remarque 2

Si f est positive et si $\int_a^b f$ diverge alors $\lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) dt = +\infty$.

Nous allons maintenant énoncer des règles de comparaison bien utiles.

Théorème de comparaison

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b[$, à valeurs réelles, et positives sur $[a, b[$.

- Si $\forall x \in [a, b[, f(x) \geq g(x) \geq 0$ et si $\int_a^b g(t) dt$ diverge alors $\int_a^b f(t) dt$ diverge.
- Si $\forall x \in [a, b[, 0 \leq f(x) \leq g(x)$ et si $\int_a^b g(t) dt$ converge alors $\int_a^b f(t) dt$ converge.

Théorème d'équivalence

Si f et g sont continues sur $[a, b[$, si f a un signe constant au voisinage de b et si $f(x) \underset{x \rightarrow b}{\sim} g(x)$ alors $\int_a^b g(t) dt$ et $\int_a^b f(t) dt$ sont de même nature.

3 Convergence absolue

On considère toujours un intervalle de la forme $I = [a, b[$ avec $a < b$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Définition 2 Soit f une fonction réelle continue sur l'intervalle $[a, b[$ de $\mathbb{R}$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ **converge absolument** si $\int_a^b |f(t)| dt$ converge.

Théorème

Soit f une fonction réelle continue sur $[a, b[$ dont l'intégrale sur $[a, b[$ converge absolument. Alors l'intégrale de f sur $[a, b[$ converge et

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

Démonstration

On note $f_+ = \max(f, 0)$ et $f_- = \max(-f, 0)$. Ce sont deux fonctions positives, $0 \leq f_+ \leq |f|$ et $0 \leq f_- \leq |f|$, dont l'intégrale converge par majoration. Et comme $f = f_+ - f_-$, on déduit (par linéarité) que l'intégrale de f converge sur $[a, b[$.

Enfin, $\int_a^b f = \int_a^b f_+ - \int_a^b f_-$ donc $\left| \int_a^b f \right| \leq \left| \int_a^b f_+ \right| + \left| \int_a^b f_- \right| = \int_a^b f_+ + \int_a^b f_-$ (intégrales de fonctions positives) soit finalement $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b (f_+ + f_-) = \int_a^b |f|$.

Exemple

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{2 \cos x}{3 + x\sqrt{x}} dx$ est convergente.

Définition 3 Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est **semi-convergente** si cette intégrale est convergente sans être absolument convergente.

Exemple

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est semi-convergente.