

MASTER 1
Métiers de l'Éducation, de l'Enseignement et de la Formation
mention Second degré - Parcours Mathématiques

Licence 3 de mathématiques - PCAP

Écrit blanc du 31/01/2026

Durée : 4 heures

*Calculatrice avec mémoire alphanumérique et/ou avec écran graphique qui dispose d'une fonctionnalité « **mode examen** » autorisée conformément à la circulaire MENH2119786C du 17 juin 2021.*

Elle doit répondre aux spécificités suivantes :

- *la neutralisation temporaire de l'accès à la mémoire de la calculatrice ou l'effacement définitif de cette mémoire ;*
- *le blocage de toute transmission de données, que ce soit par Wifi, Bluetooth ou par tout autre dispositif de communication à distance ;*
- *la présence d'un signal lumineux clignotant sur la tranche haute de la calculatrice, attestant du passage au « mode examen » ;*
- *la non-réversibilité du « mode examen » durant toute la durée de l'épreuve.*

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

Ce sujet est formé de trois problèmes indépendants.

La clarté et la précision des raisonnements, la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Tournez la page S.V.P.

Problème 1 : VRAI -FAUX

Pour chacun des items suivants, préciser si l'assertion finale est vraie ou fausse et justifier la réponse donnée. Toute réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

Arithmétique.

1. Pour tout entier relatif k , les entiers $(7k + 3)$ et $(2k + 1)$ sont premiers entre eux.
2. L'équation $19x \equiv 3 [53]$ admet des solutions dans \mathbb{Z} .
3. Soient un entier relatif x et un entier naturel non nul n . Si $x^2 \equiv 9 [n]$ alors $x \equiv 3 [n]$ ou $x \equiv -3 [n]$.

Analyse réelle.

4. Soit f une fonction strictement croissante sur l'intervalle $[-4; 4]$ telle que $f(-4) = -3$ et $f(4) = 2$.
L'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution dans l'intervalle $[-4; 4]$.
5. On note pour tout réel $t \geq 1$, $A(t) = \int_1^t x^2 \ln x \, dx$. On a $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{A(t)}{t^2} = +\infty$.
6. Toute suite (u_n) qui vérifie l'assertion suivante tend vers $+\infty$.

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall A \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq n_0 \implies u_n \geq A)$$

7. Les solutions de l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = 2$ sont les fonctions $x \mapsto k \exp(2x) + 1$ où k désigne un nombre réel quelconque.

Raisonnement/définitions.

8. Soient f et g deux applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On a alors :

$$(\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x)g(x) = 0) \iff [(\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 0) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = 0)]$$

9. Dans l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ des parties de \mathbb{N} , l'inclusion est une relation d'ordre.

Algèbre linéaire

10. On considère la matrice A de $M_2(\mathbb{C})$, définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Le produit des valeurs propres de A est égal à 2
11. On considère une matrice carrée A de taille n ($n \in \mathbb{N}^*$), à coefficients dans \mathbb{C} et diagonalisable.
La matrice A^2 est diagonalisable.
12. Le polynôme $P = X^3 + 2X^2 + X$ est le polynôme caractéristique d'une matrice carrée inversible à coefficients réels.

Tournez la page S.V.P.

Problème 2 : le problème de Bâle

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1, on définit la suite $(B_n)_{n \geq 1}$ par $B_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

Le problème de Bâle consiste en la détermination de la limite de la suite $(B_n)_{n \geq 1}$. Ce problème a été résolu en 1741, par Léonhard Euler, qui a démontré que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

- 1) Démontrer que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.
- 2) Utiliser l'inégalité précédente pour démontrer que la suite $(B_n)_{n \geq 1}$ est convergente. On explicitera le théorème de convergence utilisé.

3) Pour tout entier naturel n non nul et tout réel $t \in [0; \pi]$, on pose $D_n(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kt)$.

a) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul et tout réel $t \in [0; \pi]$, $\sum_{k=-n}^n e^{ikt} = D_n(t)$.

b) En déduire que, si $t \in]0; \pi]$, $D_n(t) = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$.

c) Calculer la valeur de $D_n(0)$.

4) On considère la fonction f définie sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ par $f : t \mapsto \begin{cases} \frac{t}{\sin(t)} & \text{si } t > 0, \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$

- a) Démontrer que, f est continue sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.
- b) Démontrer que f est dérivable en 0.
- c) Démontrer que, f est de classe C^1 sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.

5)

a) Démontrer, à l'aide d'une double intégration par parties, que pour tout entier naturel k non nul,

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(kt) dt = \frac{1}{k^2}.$$

b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $B_n = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \frac{D_n(t) - 1}{2} dt$.

c) Déterminer la valeur de $\int_0^\pi \left(t - \frac{t^2}{2\pi} \right) dt$.

d) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $\frac{\pi^2}{6} - B_n = \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(t - \frac{t^2}{2\pi} \right) D_n(t) dt$.

e) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul,

$$\frac{\pi^2}{6} - B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\sin(t)} \left(2 - \frac{2t}{\pi} \right) \sin((2n+1)t) dt.$$

Tournez la page S.V.P.

- 6) Déterminer une fonction g de classe C^1 sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ telle que $\frac{\pi^2}{6} - B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t) \sin((2n+1)t) dt$.
- 7) Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t) \sin((2n+1)t) dt = 0$.
- 8) En déduire la limite de la suite $(B_n)_{n \geq 1}$.

Problème 3 : dérangements

Ce problème a pour objet de déterminer le nombre de dérangements d'un ensemble fini.

Notations, définitions et rappels

Soit n un entier naturel non nul et soit E_n le sous ensemble de \mathbb{N} défini par $E_n = \{1, 2, \dots, n\}$.

On appelle permutation de E_n toute bijection de E_n dans lui-même. Soit σ une permutation de E_n et i un élément de E_n . Dire que i est un point fixe de σ signifie que $\sigma(i) = i$.

On appelle *dérangement* de E_n une permutation de E_n n'ayant aucun point fixe.

On note S_n l'ensemble des permutations de E_n .

On rappelle que le cardinal de S_n est $n!$.

On note D_n l'ensemble des dérangements de E_n .

Le cardinal de D_n est noté d_n .

Généralités

Dans cette partie, E désigne un ensemble fini non vide.

A_1, A_2 et A_3 sont des parties de E .

- Justifier l'égalité

$$\text{card}(A_1 \cup A_2) = \text{card}(A_1) + \text{card}(A_2) - \text{card}(A_1 \cap A_2)$$

où card désigne le cardinal des ensembles considérés.

- En s'inspirant de la relation précédente et en illustrant la réponse par un schéma, donner sans démonstration une expression de $\text{card}(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$ en fonction des cardinaux des intersections de ces parties.

Dans la suite, on admettra la formule du crible ci-dessous qui constitue une généralisation des deux précédentes.

Étant données n parties A_1, A_2, \dots, A_n d'un ensemble E fini non vide, on a

$$\text{card} \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \sum_{k=1}^n \left((-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \text{card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) \right).$$

- Retrouver, à l'aide de la formule du crible, la réponse obtenue à la question 2.

Tournez la page S.V.P.

Calcul du nombre de dérangements

4. Donner les valeurs de d_1 et d_2 .

Pour tout entier i élément de E_n , on note A_i l'ensemble des permutations admettant au moins i pour point fixe.

$$A_i = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(i) = i\}$$

5. Démontrer que $S_n \setminus D_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$.

6. Étant donné un entier k de E_n et k entiers deux à deux distincts i_1, i_2, \dots, i_k , justifier l'égalité

$$\text{card}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = (n - k)!$$

7. Dédurre des deux questions précédentes et de la formule du crible que

$$d_n = n! - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (n - k)!$$

8. Démontrer que

$$d_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Applications

9. On note p_n la probabilité qu'une permutation choisie au hasard de façon équiprobable dans S_n soit un dérangement.

La suite (p_n) admet-elle une limite? Si oui laquelle?

10. On répartit au hasard n boules numérotées de 1 à n dans n urnes numérotées de 1 à n , en plaçant une boule par urne.

On note X_n la variable aléatoire qui à une telle répartition associe le nombre de coïncidences entre le numéro de l'urne et celui de la boule qu'elle reçoit.

10.1 Déterminer $P([X_n = 0])$ et en déduire une expression de $P([X_n \geq 1])$.

10.2 Démontrer que pour tout entier q de E_n , on a

$$P([X_n = q]) = \frac{1}{q!} \sum_{k=0}^{n-q} \frac{(-1)^k}{k!}$$

10.3 Démontrer que l'espérance de X_n est indépendante de n .

On pourra écrire X_n sous forme d'une somme de variables aléatoires.