Institut national
supérieur du professorat
et de l'éducation
Bretagne

MASTER
Métiers de l'Éducation, de l'Enseignement et de la Formation mention Second degré

Parcours MATHÉMATIQUES

CAPES blanc du 12 mars

Durée : 5 heures

Calculatrice avec mémoire alphanumérique et/ou avec écran graphique qui dispose d'une fonctionnalité « mode examen » autorisée conformément à la circulaire MENH2119786C du 17 juin 2021.
Elle doit répondre aux spécificités suivantes :

- *la neutralisation temporaire de l'accès à la mémoire de la calculatrice ou l'effacement définitif de cette mémoire ;*
- *le blocage de toute transmission de données, que ce soit par Wifi, Bluetooth ou par tout autre dispositif de communication à distance ;*
- *la présence d'un signal lumineux clignotant sur la tranche haute de la calculatrice, attestant du passage au « mode examen » ;*
- *la non-réversibilité du « mode examen » durant toute la durée de l'épreuve.*

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.
De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

Le dossier de ce sujet comprend deux parties totalement indépendantes.
La clarté et la précision des raisonnements, la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Tourner la page S.V.P.

Dossier, partie 1 : Calcul littéral

Programme de mathématiques de cycle 4

Utiliser le calcul littéral

Connaissances

- Notions d'inconnue, d'équation, d'indéterminée, d'identité.
- Propriétés de distributivité (simple et double).
- Annulation d'un produit (démonstration possible par disjonction de cas).
- Factorisation de $a^2 - b^2$.

Compétences associées

- Développer, factoriser, réduire des expressions algébriques dans des cas très simples.
- Utiliser le calcul littéral pour traduire une propriété générale (par exemple la distributivité simple), pour démontrer un résultat général (par exemple que la somme de trois entiers consécutifs est un multiple de trois), pour valider ou réfuter une conjecture, pour modéliser une situation..
- Mettre un problème en équation en vue de sa résolution.
- Résoudre algébriquement des équations du premier degré ou s'y ramenant (équations produits), en particulier des équations du type $x^2 = a$.

Programme de mathématiques de seconde générale et technologique

Utiliser le calcul littéral

Contenus

- Règles de calcul sur les puissances entières relatives, sur les racines carrées. Relation $\sqrt{a^2} = |a|$
- Identités $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, à savoir utiliser dans les deux sens.
- Exemples simples de calcul sur des expressions algébriques, en particulier sur des expressions fractionnaires.
- Somme d'inégalités. Produit d'une inégalité par un réel positif, négatif, en liaison avec le sens de variation d'une fonction affine.
- Ensemble des solutions d'une équation, d'une inéquation.

Capacités attendues

– Effectuer des calculs numériques ou littéraux mettant en jeu des puissances, des racines carrées, des écritures fractionnaires.
– Sur des cas simples de relations entre variables (par exemple $U = RI$, $d = \frac{v}{t}$, $S = \pi r^2$,$V = abc$, $V = \pi r^2 h$), exprimer une variable en fonction des autres. Cas d'une relation du premier degré $ax + by = c$.
– Choisir la forme la plus adaptée (factorisée, développée réduite) d'une expression en vue de la résolution d'un problème.
– Comparer deux quantités en utilisant leur différence, ou leur quotient dans le cas positif.
– Modéliser un problème par une inéquation.
– Résoudre une inéquation du premier degré.

Programme de mathématiques, spécialité de première générale

Équations, fonctions polynômes du second degré

Contenus

– Fonction polynôme du second degré donnée sous forme factorisée. Racines, signe, expression de la somme et du produit des racines.
– Forme canonique d'une fonction polynôme du second degré. Discriminant. Factorisation éventuelle. Résolution d'une équation du second degré. Signe.

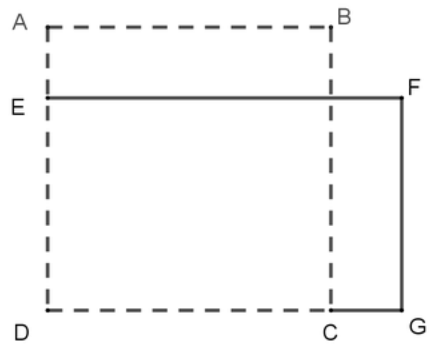
Capacités attendues

– Étudier le signe d'une fonction polynôme du second degré donnée sous forme factorisée.
– Déterminer les fonctions polynômes du second degré s'annulant en deux nombres réels distincts.
– Factoriser une fonction polynôme du second degré, en diversifiant les stratégies : racine évidente, détection des racines par leur somme et leur produit, identité remarquable, application des formules générales.
– Choisir une forme adaptée (développée réduite, canonique, factorisée) d'une fonction polynôme du second degré dans le cadre de la résolution d'un problème (équation, inéquation, optimisation, variations).

Énoncé de l'exercice 1

D'après Rapport de jury CAPES externe de mathématiques 2012, épreuve sur dossier

Le dessin ci-contre représente une figure composée d'un carré $ABCD$ et d'un rectangle $DEFG$. E est un point du segment $[AD]$. C est un point du segment $[DG]$. Dans cette figure, la longueur AB peut varier mais on a toujours $AE = 15$ cm et $CG = 25$ cm.



1. Dans cette question, on suppose que $AB = 40$ cm.
   (a) Calculer l'aire du carré $ABCD$.
   (b) Calculer l'aire du rectangle DEFG.
2. Peut-on trouver la longueur AB de sorte que l'aire du carré $ABCD$ soit égale à l'aire du rectangle $DEFG$? Si oui, calculer AB. Si non, expliquer pourquoi.
   Si le travail n'est pas terminé, laisser tout de même une trace de recherche. Elle sera prise en compte.

Les réponses de trois élèves de cycle 4 à la question 2

Élève 1

J'ai fait un tableau avec plusieurs valeurs, on voit que les deux aires vont être égales à un moment.

AB	*aire du carré ABCD*	*aire du rectangle DEFG*
40	1600	1625
30	900	825
35	1225	1200

J'ai essayé pile entre 35 et 40 : 37,5. C'est la bonne réponse !

Élève 2

J'ai appelé I l'intersection de (EF) et (BC). Les deux aires sont égales si les rectangles ABIE et CGFI ont la même aire. Il faut donc que $15 \times AB = 25 \times GF$. C'est vrai pour $AB = 5$ et $GF = 3$. Donc il y a bien une solution.

Élève 3

Pour que les deux figures aient la même aire, il faut au moins qu'elles soient toutes les deux des carrés, mais ça n'est pas possible. Le problème n'a pas de solution.

Énoncé de l'exercice 2

Soit l'équation d'inconnue réelle x et de paramètre réel m : $(m-2)x^2 - 2(m+2)x + 2m - 2 = 0$ (E)

1. Déterminer le paramètre m pour que 2 soit racine de (E) et donner alors l'autre racine.
2. Étudier suivant les valeurs de m l'existence et le signe des racines de (E).
3. Trouver entre les racines de (E) une relation indépendante de m. En déduire les éventuelles racines doubles de (E).
4. Déterminer m pour que les racines x_1 et x_2 de (E) vérifient la relation ${x_1}^2 + {x_2}^2 = 2$.
5. Placer, suivant les valeurs de m, l'entier 1 par rapport aux racines de (E).

Énoncé de l'exercice 3

D'après le document ressource Calcul Littéral, Cycle 4 (MEN), Eduscol, Mars 2016

Le magicien : " Pensez à un nombre, multipliez-le par 2, enlevez 3, multipliez le résultat par 3 et enlevez le nombre de départ. Quel est le nombre que vous obtenez ? "
Un spectateur : " 31 "
Le magicien : " Le nombre pensé au départ est ... "
Le spectateur : " C'est exact "
Quelle était la réponse du magicien ?

Questions aux candidats

I- Analyse des productions d'élèves

1. Analyser, pour l'exercice 1, les productions des trois élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs erreurs éventuelles.
2. Indiquer pour chaque élève les commentaires et indications que l'on pourrait lui donner afin de l'aider à progresser.
3. Proposer une correction de la question 2. telle que l'on pourrait la mettre à disposition des élèves.
4. Proposer deux *problèmes pouvant mener à la résolution d'équations*, l'un à destinations d'élèves de cycle 4, l'autre à destination d'élèves de lycée. Expliciter les compétences travaillées et les pré-requis.

II- Autour de la résolution d'une équation du second degré

1. Présenter les connaissances mises en jeu dans l'exercice 2 ainsi que le niveau de la classe auquel il pourrait être présenté
2. Proposer une solution de cet exercice telle que vous pourriez la mettre à disposition des élèves.
3. Proposer des éléments observables permettant d'apprécier la réussite d'un élève dans la résolution de cet exercice. Préciser les compétences mathématiques alors mises en jeu.
4. Citer un élément majeur relatif à l'histoire de la résolution d'équations

III- Conception d'une séance d'enseignement

Proposer le contenu d'une séance pour un groupe d'élèves en classe de quatrième dont l'activité principale serait l'exercice 3.
Cette présentation devra comprendre les éléments suivants :

1. les objectifs, les compétences visées, les pré-requis et sa position dans la progression de l'année;
2. le scénario de cette séance : déroulement, timing, différentes d'activités et à chaque fois l'activité des élèves et du professeur ...;
3. des pistes d'utilisation d'outils numériques;
4. en particulier, pour l'exercice 3, préciser les consignes données aux élèves, les coups de pouce éventuels, l'organisation détaillée de l'activité des élèves et du professeur et le matériel nécessaire en mettant en évidence la différenciation pédagogique proposée.

Dossier, partie 2 : Probabilités

Programme de mathématiques de Seconde Générale et Technologique

Modéliser le hasard, calculer des probabilités

L'ensemble des issues est fini.

Contenus

- Ensemble (univers) des issues. Événements. Réunion, intersection, complémentaire.
- Loi (distribution) de probabilité. Probabilité d'un événement : somme des probabilités des issues.
- Relation $P(A \cap B) + P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- Dénombrement à l'aide de tableaux et d'arbres.

Capacités attendues

- Utiliser des modèles théoriques de référence (dé, pièce équilibrée, tirage au sort avec équiprobabilité dans une population) en comprenant que les probabilités sont définies a priori.
- Construire un modèle à partir de fréquences observées, en distinguant nettement modèle et réalité.
- Calculer des probabilités dans des cas simples : expérience aléatoire à deux ou trois épreuves.

Programme de spécialité mathématiques de Première Générale

Probabilités conditionnelles et indépendance

Contenu

- Probabilité conditionnelle d'un événement B sachant un événement A de probabilité non nulle. Notation $P_A(B)$. Indépendance de deux événements.
- Arbres pondérés et calcul de probabilités : règle du produit, de la somme.
- Partition de l'univers (systèmes complets d'événements). Formule des probabilités totales.
- Succession de deux épreuves indépendantes. Représentation par un arbre ou un tableau.

Capacités attendues

- Construire un arbre pondéré ou un tableau en lien avec une situation donnée. Passer du registre de la langue naturelle au registre symbolique et inversement.
- Utiliser un arbre pondéré ou un tableau pour calculer une probabilité.
- Calculer des probabilités conditionnelles lorsque les événements sont présentés sous forme de tableau croisé d'effectifs (tirage au sort avec équiprobabilité d'un individu dans une population).
- Dans des cas simples, calculer une probabilité à l'aide de la formule des probabilités totales.
- Distinguer en situation $P_A(B)$ et $P_B(A)$, par exemple dans des situations de type « faux positifs ».
- Représenter une répétition de deux épreuves indépendantes par un arbre ou un tableau.

Variables aléatoires réelles

Contenu

- Variable aléatoire réelle : modélisation du résultat numérique d'une expérience aléatoire ; formalisation comme fonction définie sur l'univers et à valeurs réelles.
- Loi d'une variable aléatoire.
- Espérance, variance, écart type d'une variable aléatoire.

Capacités attendues

- Interpréter en situation et utiliser les notations $\{X = a\}$, $\{X \leq a\}$, $P(X = a)$, $P(X \leq a)$. Passer du registre de la langue naturelle au registre symbolique et inversement.
- Modéliser une situation à l'aide d'une variable aléatoire.
- Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire.
- Calculer une espérance, une variance, un écart type.
- Utiliser la notion d'espérance dans une résolution de problème (mise pour un jeu équitable...).

Programme de spécialité mathématiques de Terminale Générale

Succession d'épreuves indépendantes, schéma de Bernoulli

Contenu

- Modèle de la succession d'épreuves indépendantes : la probabilité d'une issue $(x_1, \dots, x_n)$ est égale au produit des probabilités des composantes x_i. Représentation par un produit cartésien, par un arbre.
- Épreuve de Bernoulli, loi de Bernoulli.
- Schéma de Bernoulli : répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes.
- Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$: loi du nombre de succès. Expression à l'aide des coefficients binomiaux.

Capacités attendues

- Modéliser une situation par une succession d'épreuves indépendantes, ou une succession de deux ou trois épreuves quelconques. Représenter la situation par un arbre. Calculer une probabilité en utilisant l'indépendance, des probabilités conditionnelles, la formule des probabilités totales.
- Modéliser une situation par un schéma de Bernoulli, par une loi binomiale.
- Utiliser l'expression de la loi binomiale pour résoudre un problème de seuil, de comparaison, d'optimisation relatif à des probabilités de nombre de succès.
- Dans le cadre d'une résolution de problème modélisé par une variable binomiale X, calculer numériquement une probabilité du type $P(X = k)$, $P(X \leq k)$, $P(k \leq X \leq k')$, en s'aidant au besoin d'un algorithme ; chercher un intervalle I pour lequel la probabilité $P(X \in I)$ est inférieure à une valeur donnée α, ou supérieure à $1 - \alpha$.

Sommes de variables aléatoires

Contenu

- Somme de deux variables aléatoires. Linéarité de l'espérance : $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ et $E(aX) = aE(X)$.
- Dans le cadre de la succession d'épreuves indépendantes, exemples de variables indépendantes X, Y et relation d'additivité $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$. Relation $V(aX) = aV(X)$.
- Application à l'espérance, la variance et l'écart type de la loi binomiale.
- Échantillon de taille n d'une loi de probabilité : liste $(X_1, \dots, X_n)$ de variables indépendantes identiques suivant cette loi. Espérance, variance, écart type de la somme $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et de la moyenne $M_n = S_n/n$.

Capacités attendues

- Représenter une variable comme somme de variables aléatoires plus simples.
- Calculer l'espérance d'une variable aléatoire, notamment en utilisant la propriété de linéarité.
- Calculer la variance d'une variable aléatoire, notamment en l'exprimant comme somme de variables aléatoires indépendantes.

Concentration, loi des grands nombres

Contenu

- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Pour une variable aléatoire X d'espérance μ et de variance V, et quel que soit le réel strictement positif δ : $P(|X-\mu| \geq \delta) \leq \dfrac{V(X)}{\delta^2}$.
- Inégalité de concentration. Si M_n est la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire d'espérance μ et de variance V, alors pour tout $\delta > 0$, $P(|M_n - \mu| \geq \delta) \leq \dfrac{V}{n\delta^2}$.
- Loi des grands nombres.

Capacités attendues

- Représenter une variable comme somme de variables aléatoires plus simples.
- Calculer l'espérance d'une variable aléatoire, notamment en utilisant la propriété de linéarité.
- Calculer la variance d'une variable aléatoire, notamment en l'exprimant comme somme de variables aléatoires indépendantes.

Énoncé de l'exercice 4

D'après le document ressource Suites, exponentielle, probabilités — Modéliser et représenter (MENJ, Eduscol, novembre 2019)

> Un quart de la population a été vacciné contre une maladie contagieuse. Survient une épidémie. On constate que, parmi les malades, on trouve en moyenne un vacciné pour quatre non vaccinés, et parmi les vaccinés un malade sur douze.
>
> Selon vous, le vaccin est-il efficace ?

Énoncé de l'exercice 5

D'après Rapport de jury CAPES externe de mathématiques 2017, épreuve sur dossier

> Un restaurateur prépare chaque jour trente crèmes catalanes pour soixante-dix couverts.
> Le restaurateur affirme : « En moyenne deux clients sur cinq choisissent une crème catalane en dessert donc je pense que dans plus de 70 % des cas j'aurais assez de crèmes catalanes ».
>
> A-t-il raison ?

Les réponses de deux élèves de terminale générale – Enseignement de spécialité

Élève 1

J'ai reconnu la loi binomiale : $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ avec $n = 70$, $p = 0,4$ et $k = 30$.
La probabilité est donc environ 0,085.
Donc le restaurateur a tort, il satisfait seulement 8,5 % de la demande. Cela me semble peu.

Élève 2

J'ai écrit un algorithme qui calcule le nombre de crèmes catalanes commandées par les soixante-dix clients puis je l'ai répété mille fois pour avoir une moyenne :
J'ai lancé 3 fois l'algorithme et j'ai trouvé 27,9 ; 28,1 et 28. En moyenne 28 crèmes catalanes sont commandées par les 70 clients donc ils seront tous satisfaits.

```
from random import randint

def nombre_moyen():
    C = 0
    for i in range(1000):
        for j in range(70):
            alea = randint(1,5)
            if alea < 3:
                C = C + 1
    M = C / 1000
    return M
```

Questions aux candidats

IV- Exercice à prise d'initiative

1. Citer les pré-requis nécessaires à la résolution de l'exercice 4.
2. Proposer une résolution de l'exercice 4 telle qu'elle pourrait être mise à disposition des élèves dans une classe de première générale dans le cadre de l'enseignement de spécialité mathématiques.
3. Proposer des éléments observables permettant d'apprécier la réussite d'un élève de première générale dans la résolution de cet exercice. Préciser les compétences mathématiques alors mises en jeu.

V- Analyse des productions d'élèves et rédaction d'une solution

1. Analyser les solutions apportées par les deux élèves à l'exercice 5 en mettant en évidence leurs réussites et leurs erreurs éventuelles. On mettra cette analyse en perspective au regard des compétences « modéliser », « raisonner » et « communiquer ».
2. Préciser, pour chaque élève, l'aide qui pourrait lui permettre de mener à bien sa démarche.
3. Rédiger une solution de l'exercice 5 telle qu'elle pourrait être présentée à une classe de terminale générale dans le cadre de l'enseignement de spécialité mathématiques. On détaillera la réponse en prenant soin de donner toutes les justifications nécessaires.

VI- Conception d'une séance d'enseignement

Proposer le contenu d'une séance, pour un groupe d'élèves en classe de première générale dans le cadre de l'enseignement de spécialité, dont l'activité principale serait l'exercice 4.
Cette présentation devra comprendre les éléments suivants :

1. les objectifs, les compétences visées, les pré-requis et sa position dans la progression de l'année ;
2. le scénario de cette séance : déroulement, timing, différentes activités et à chaque fois l'activité des élèves et du professeur ... ;
3. des pistes d'utilisation d'outils numériques ;
4. en particulier, pour l'exercice 4, préciser les consignes données aux élèves, les coups de pouce éventuels, l'organisation détaillée de l'activité des élèves et du professeur ainsi que le matériel nécessaire, en mettant en évidence la différenciation pédagogique proposée.